ポテンシャル流

２次元のケース

複素関数論

流れの解析手順

●複素速度ポテンシャル

$$f = \Phi + i\Psi$$

●複素速度

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

●渦なし条件

$$\mathbf{u} = grad\Phi$$

●ベルヌーイの式

$$\frac{1}{2}\left|\mathbf{u}\right|^2 + \frac{p}{\rho} = const$$

解1（線形関数）

複素速度ポテンシャル

$$f = Uz = Ux + iUy$$

速度ポテンシャル　　　流れ関数

$$\Phi = Ux \qquad \Psi = Uy$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$ を満足する。

$$f = Uz$$

微分

$$\frac{df}{dz} = u - iv = U$$

$$u = U,\ v = 0$$

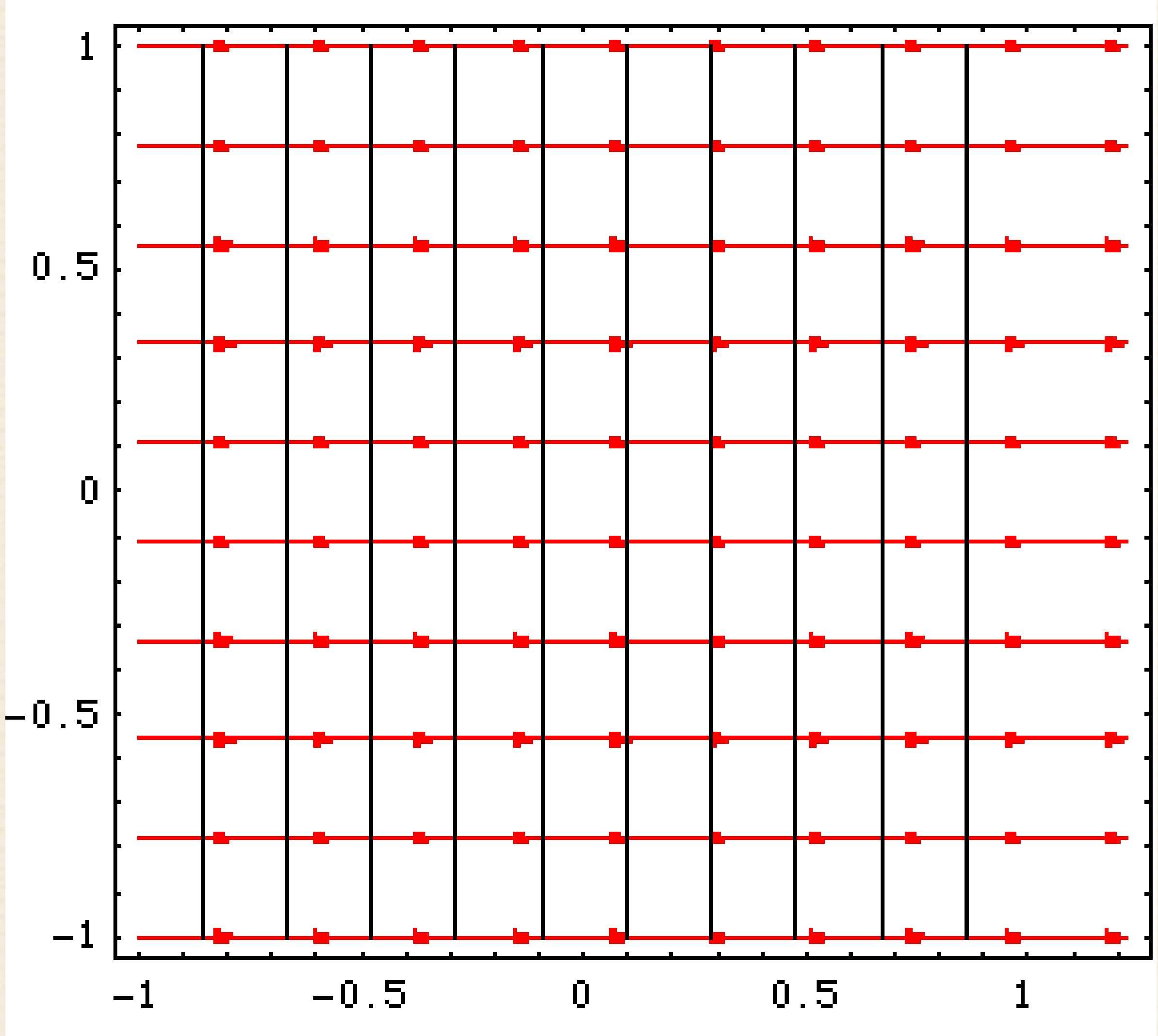
一様流れ

ベリヌーイの定理

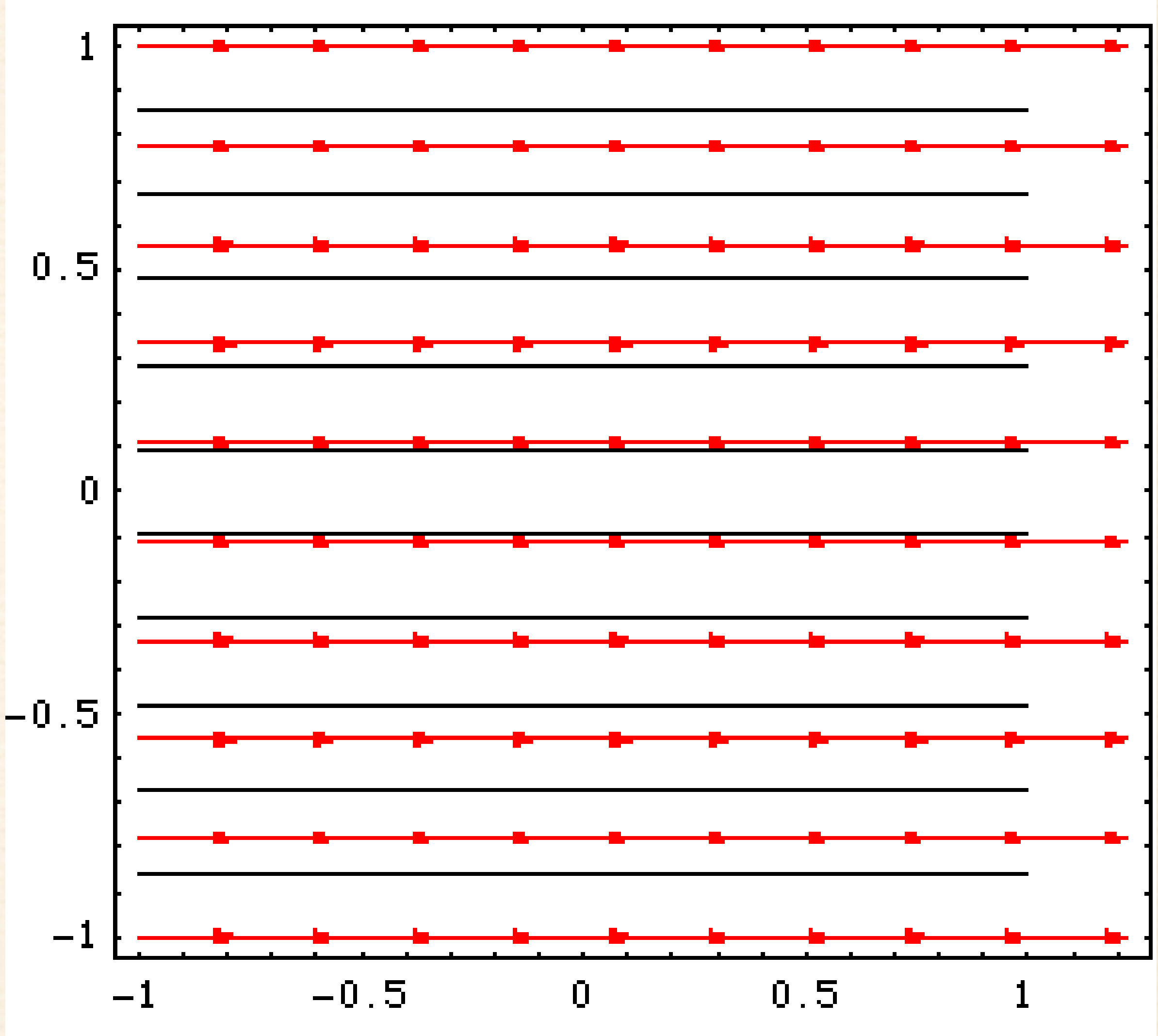
$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} = const$$

$$p = const$$

速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



解2（冪関数）

複素速度ポテンシャル

$$f = Az^n \quad n \geq 0$$

速度ポテンシャル　　流れ関数

$$\Phi = Ar^n \cos n\theta \quad \Psi = Ar^n \sin n\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$$ を満足する。

$$f = Az^n$$

微分

$$\frac{df}{dz} = u - iv = nAz^{n-1}$$

$$u = nAr^{n-1}\cos(n-1)\theta$$

$$v = -nAr^{n-1}\sin(n-1)\theta$$

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = nAr^{n-1}\cos n\theta$$

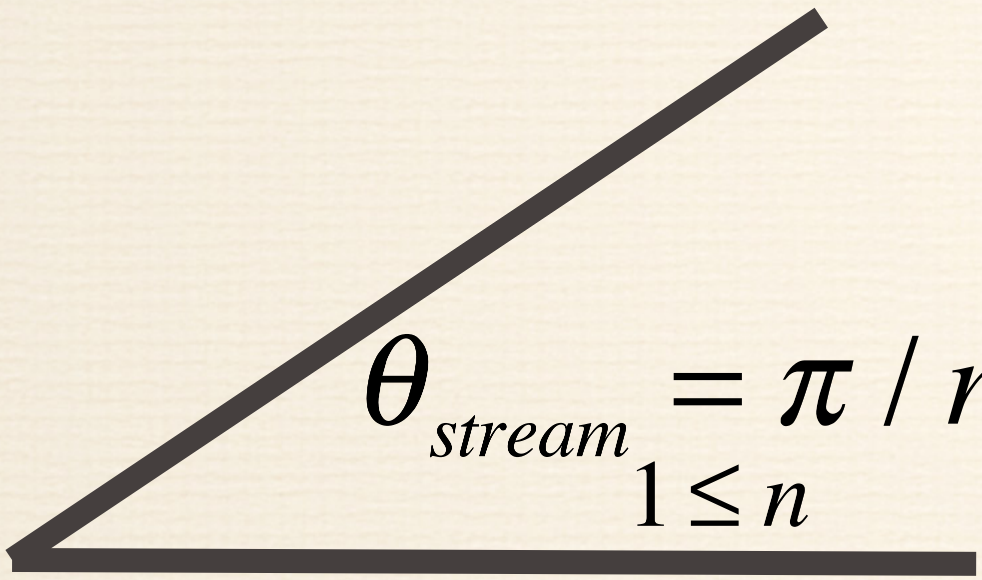
$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -nAr^{n-1}\sin n\theta$$

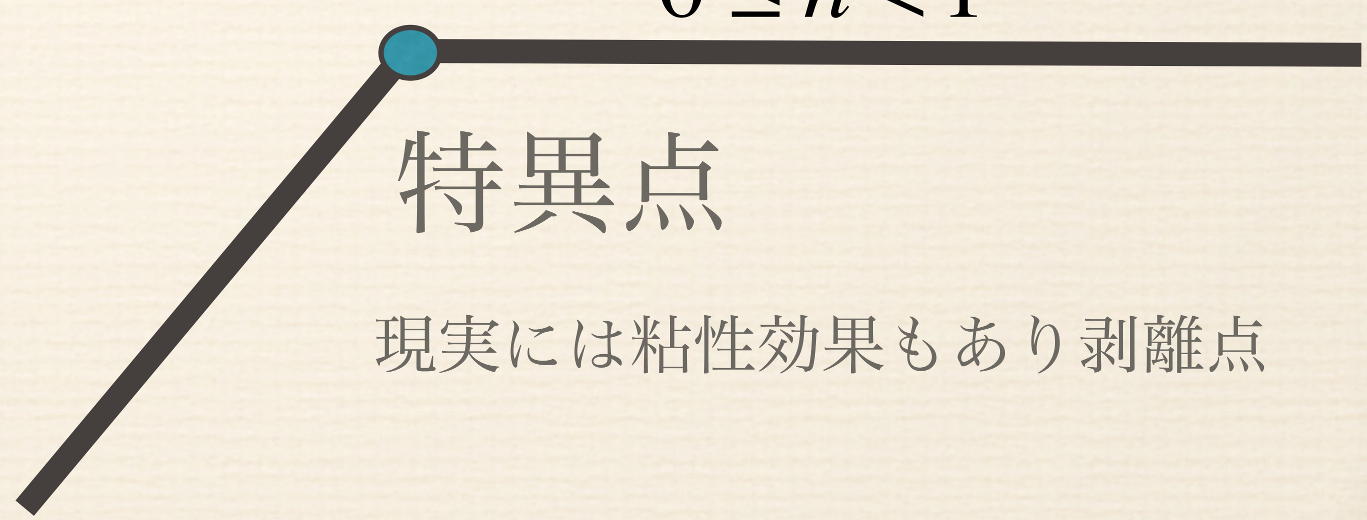
極形式

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = nAr^{n-1}\cos n\theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -nAr^{n-1}\sin n\theta$$

角を回る流れ





$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = nAr^{n-1}\cos n\theta$$

$$1 \le n$$

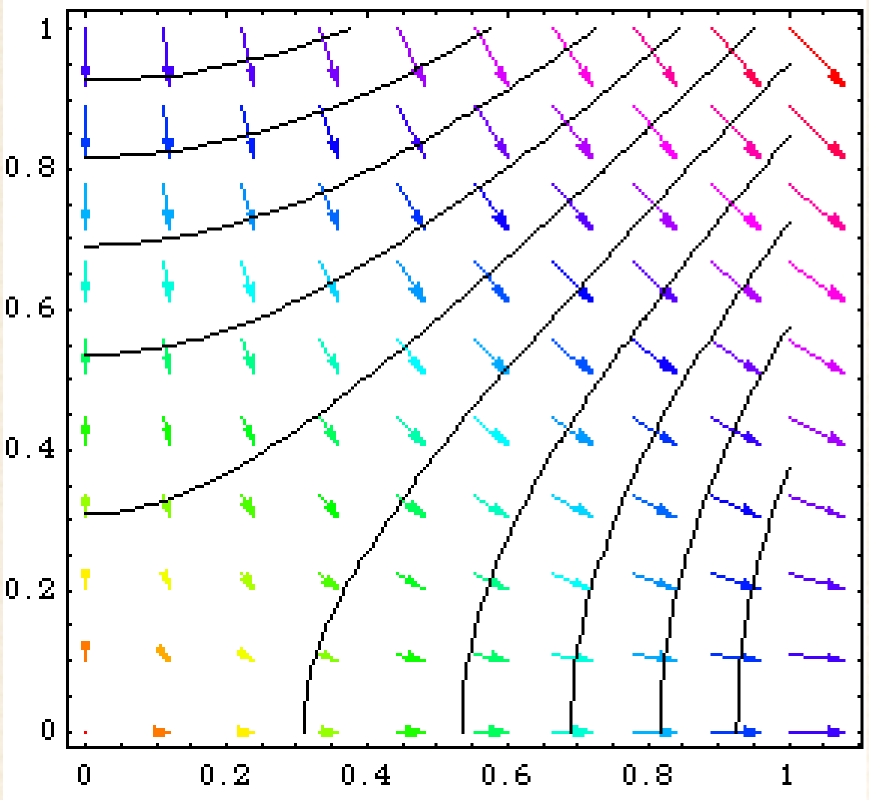
$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -nAr^{n-1}\sin n\theta$$

ベリヌーイの定理

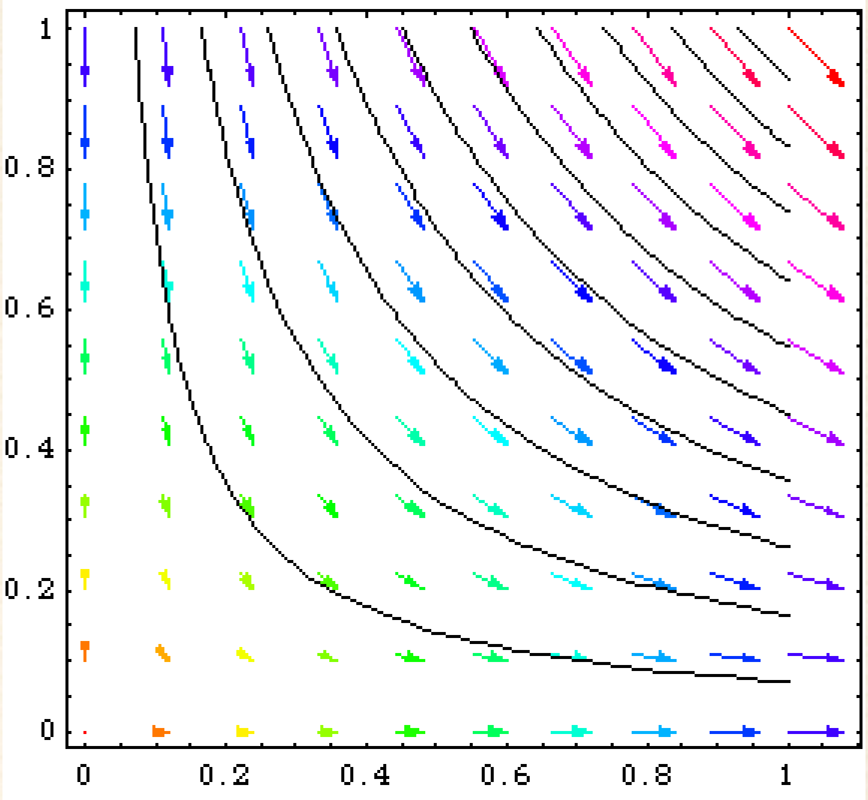
$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}|0|^2 + \frac{p_0}{\rho}$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2}n^2A^2\rho r^{2n-2}$$

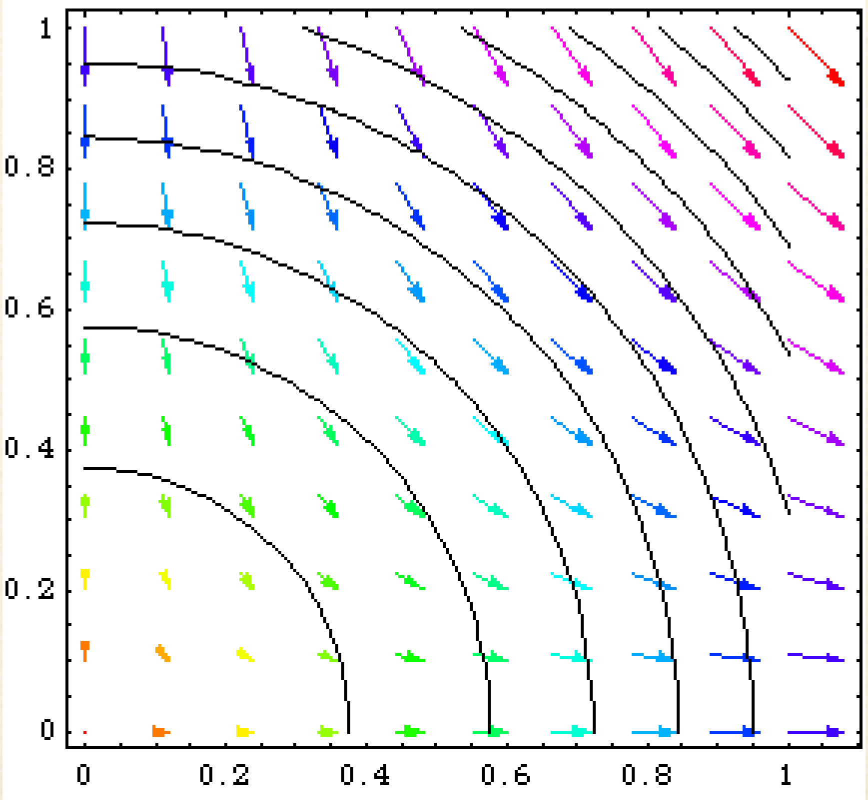
速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



圧力と速度ベクトル



n=2

解3（対数関数）

複素速度ポテンシャル

$$f = i\kappa \log z = -\kappa\theta + i\kappa \log r$$

速度ポテンシャル　　流れ関数

$$\Phi = -\kappa\theta \qquad \Psi = \kappa \log r$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$$ を満足する。

$$f = i\kappa \log z$$

微分

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{i\kappa}{z}$$

$$u = \frac{\kappa}{r}\sin\theta$$

$$v = -\frac{\kappa}{r}\cos\theta$$

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\kappa}{r}$$

極形式

渦糸

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

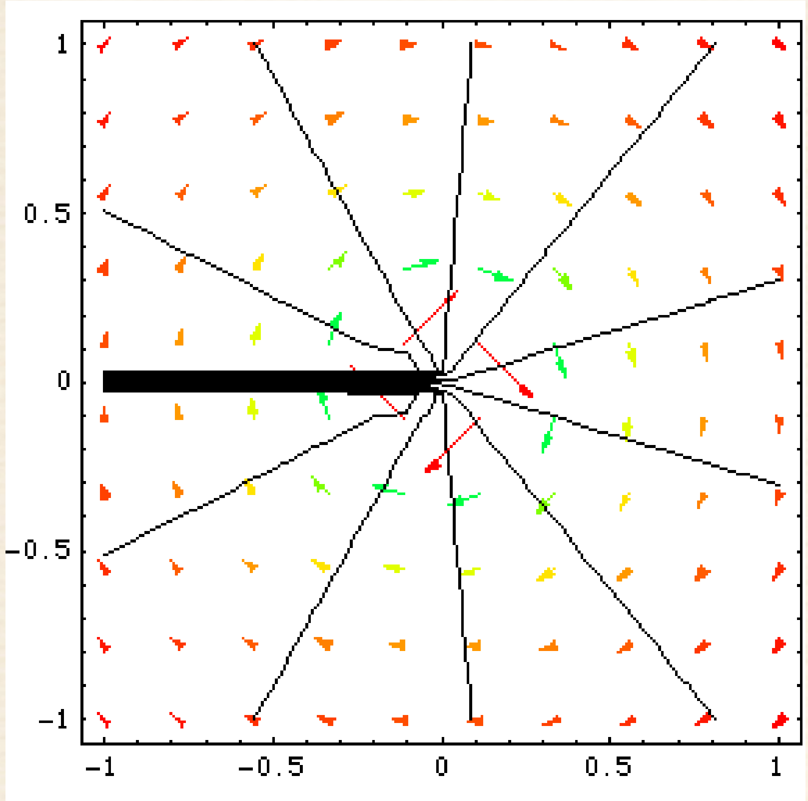
$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\kappa}{r}$$

ベリヌーイの定理

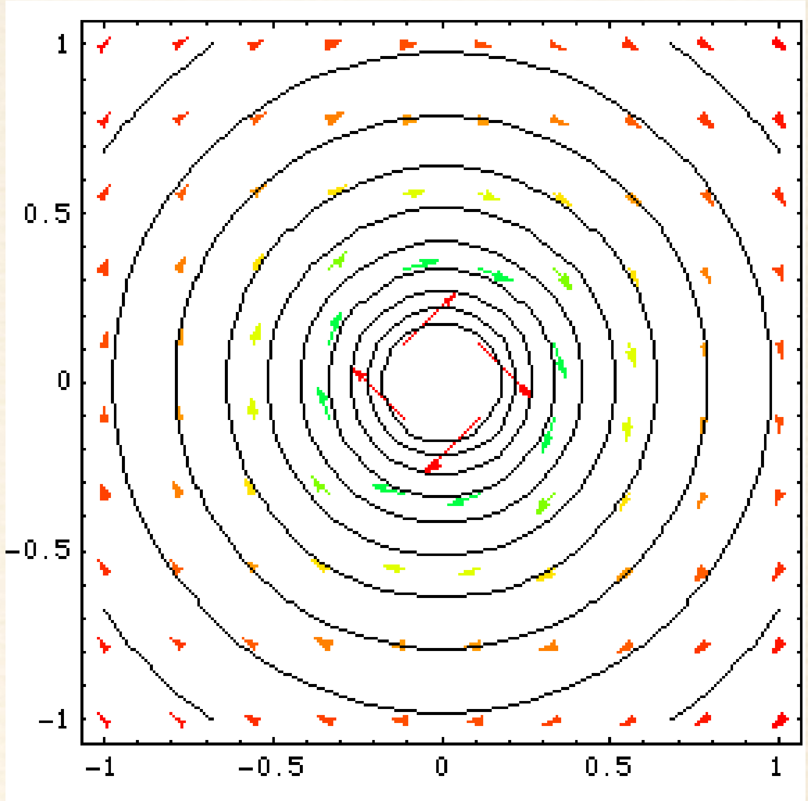
$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}|0|^2 + \frac{p_\infty}{\rho}$$

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\frac{\kappa^2}{r^2}$$

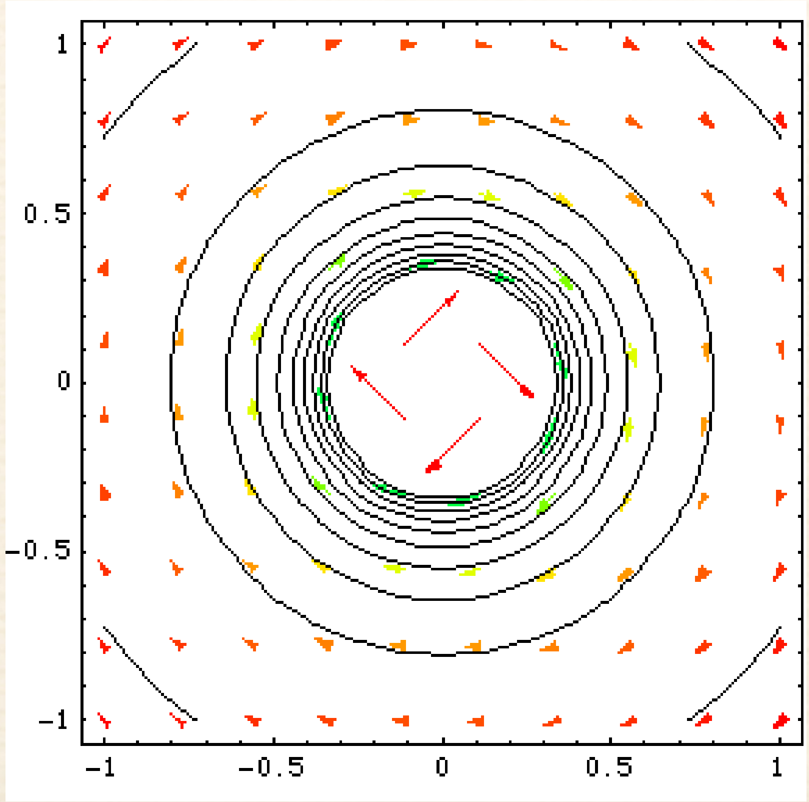
速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



圧力と速度ベクトル



解4（対数関数）

複素速度ポテンシャル

$$f = m\log z = m\log r + im\theta$$

速度ポテンシャル　　　流れ関数

$$\Phi = m\log r \qquad \Psi = m\theta$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0$$ を満足する。

$$f = m\log z$$

微分

$$\frac{df}{dz} = u - iv = \frac{m}{z}$$

$$u = \frac{m}{r}\cos\theta$$

$$v = \frac{m}{r}\sin\theta$$

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0$$

極形式

わき出し吸い込み

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{m}{r}$$

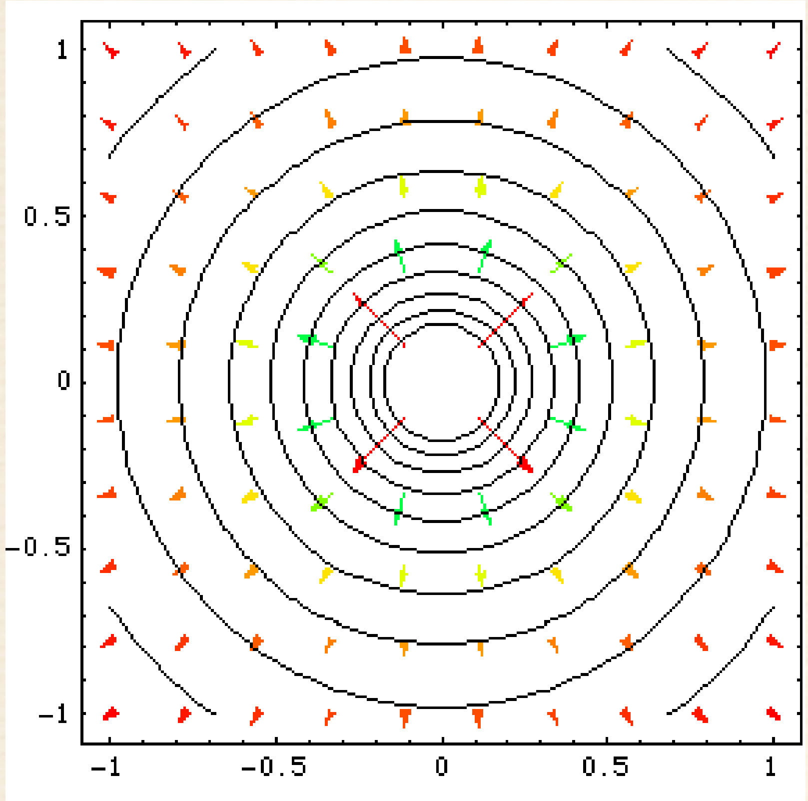
$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0$$

ベリヌーイの定理

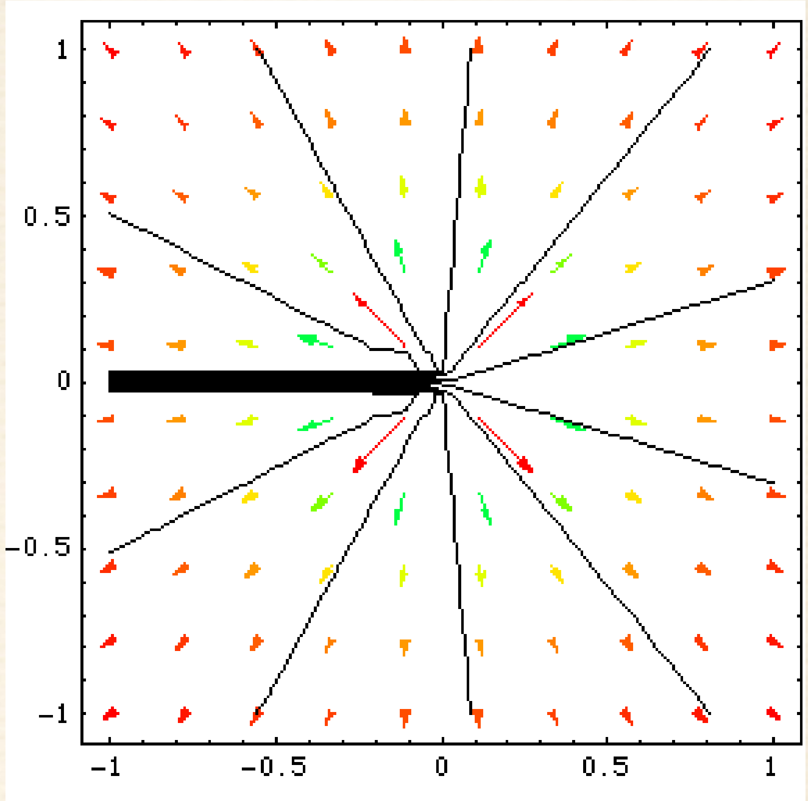
$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}|0|^2 + \frac{p_\infty}{\rho}$$

$$p = p_\infty - \frac{1}{2}\rho\frac{m^2}{r^2}$$

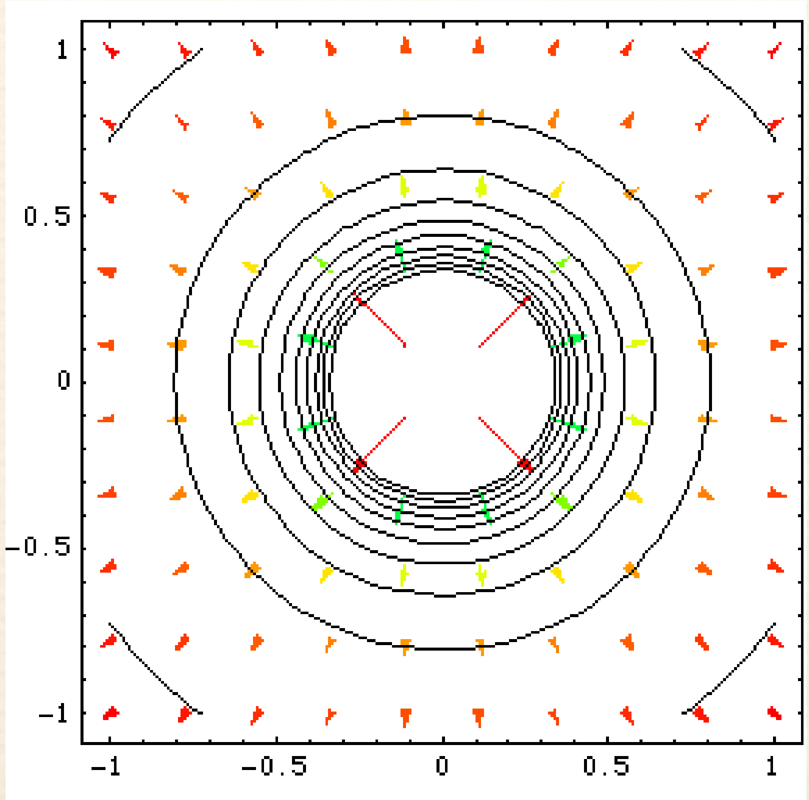
速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



圧力と速度ベクトル



鏡像法の適用

（d） **壁面が存在する場合のわき出し流れ**　壁面から h 離れた位置に強度 m のわき出しが存在する場合のポテンシャル流れについて考える。この解析の際に有効なのが鏡像法である。鏡像法では、壁面に関して壁面内部の対称な位置に同じ強度 m のわき出しが鏡像として存在すると考える。壁面を実軸に、わき出しを虚軸上に設定すると、複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = m\log(z - ih) + m\log(z + ih) \tag{2.70}$$

鏡の中に同じもの

となる。速度ポテンシャルや流れ関数は

$$\Phi(x, y) = \frac{m}{2}\log\left\{\left(x^2 - y^2 + h^2\right)^2 + 4x^2y^2\right\} \tag{2.71}$$

$$\Psi(x, y) = m\arctan\frac{2xy}{x^2 - y^2 + h^2} \tag{2.72}$$

となる。速度ベクトルは壁面では一切法線方向成分を持つことが許されない。そのため、速度ベクトルに平行な流線は壁面に沿うこととなり、流れ関数が $y = 0$ の壁面上で一定値になっていなければならない。そこで流れ関数に代入してみると

$$\Psi(x, 0) = m\arctan 0 = 0 \tag{2.73}$$

となってこの条件を正確に満足している。

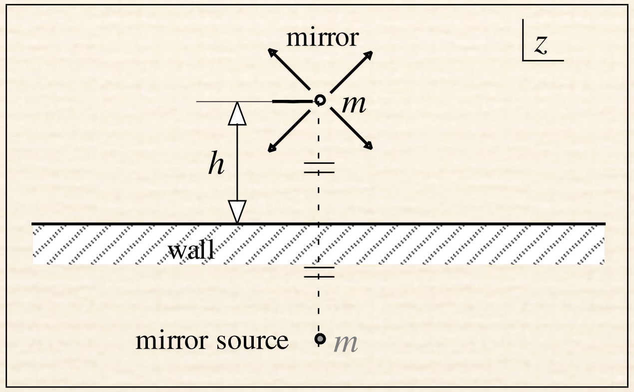


図 2.10　壁面側のわき出し流れ

この流れの複素速度は

$$w = \frac{m}{z - ih} + \frac{m}{z + ih} \tag{2.74}$$

であることから、デカルト直交座標系の速度 u と v は以下のように求まる。

$$u = \frac{mx}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{mx}{x^2 + (y+h)^2}, \quad v = \frac{m(y-h)}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{m(y+h)}{x^2 + (y+h)^2} \tag{2.75}$$

この表現から原点または無限遠方で速度はゼロになるので、そこでの圧力を基準として p_0 とするとベルヌーイの定理から圧力は

$$p = p_0 - \frac{2\rho m^2 \left(x^2 + y^2\right)}{\left(x^2 + y^2 + h^2\right)^2 - 4h^2 y^2} \tag{2.76}$$

となる。結果の可視化図は図 2.11 である。壁面が存在するためわき出し流れが上方へ向かう流れへと変化している。

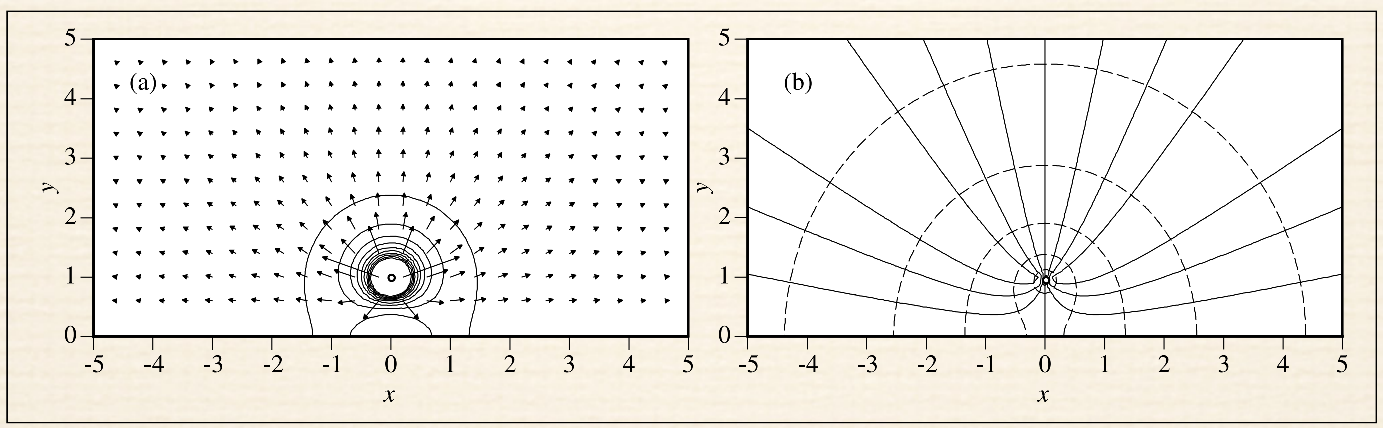


図 2.11　壁面側のわき出し流れの解 (a) 速度ベクトル図と等圧線図、(b) 流線 (実線) と速度ポテンシャルの等値線 (点線)

（f） **壁面が存在する場合の渦糸**　壁面が存在するわき出し流れの場合と同様、図 2.13 のように壁面から h 離れた位置に強度 κ の渦糸が存在する場合のポテンシャル流れでは、鏡像として壁面内部の対称な位置に符号が逆の同じ強度 $-\kappa$ の渦糸が存在すると考える。そのため、複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = i\kappa \log(z - ih) - i\kappa \log(z + ih) \tag{2.84}$$

鏡の中に逆回転

となる。速度ポテンシャルや流れ関数は

$$\Phi(x, y) = \kappa \arctan \frac{2hx}{x^2 + y^2 - h^2} \tag{2.85}$$

$$\Psi(x, y) = \frac{\kappa}{2} \log \left[\left\{ \frac{x^2 + y^2 - h^2}{x^2 + (y + h)^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{2hx}{x^2 + (y + h)^2} \right\}^2 \right] \tag{2.86}$$

となる。流れ関数は $y = 0$ の壁面上で一定値になっていなければならないが、流れ関数を確認すると

$$\Psi(x, 0) = \frac{\kappa}{2} \log 1 = 0 \tag{2.87}$$

となっており、壁面において法線方向速度は出現しないことがわかる。

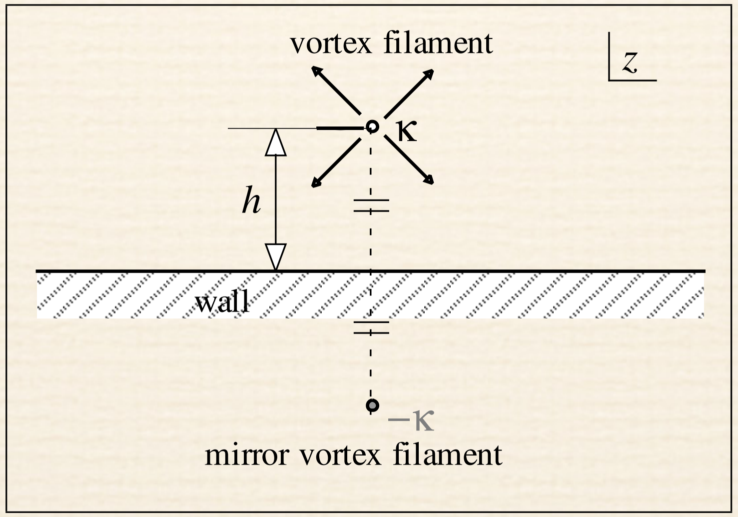


図 2.13　壁面側の渦糸流れ

この複素速度ポテンシャルを微分して、複素速度は

$$w = \frac{i\kappa}{z - ih} - \frac{i\kappa}{z + ih} \tag{2.88}$$

となるので、デカルト直交座標系の速度 u と v の式は以下のようになる。

$$u = \frac{\kappa (y-h)}{x^2 + (y-h)^2} - \frac{\kappa (y+h)}{x^2 + (y+h)^2} \tag{2.89}$$

$$v = -\frac{\kappa x}{x^2 + (y-h)^2} + \frac{\kappa x}{x^2 + (y+h)^2} \tag{2.90}$$

速度は無限遠方でゼロであり、無限遠方での圧力を基準として p_0 とするとベルヌーイの定理から圧力は

$$p = p_0 - \frac{2\rho\kappa^2 h^2}{\left\{x^2 + (y-h)^2\right\}\left\{x^2 + (y+h)^2\right\}} \tag{2.91}$$

となる。結果は図 2.14 であり、圧力分布はわき出しの場合は壁近傍に急勾配が出現していたが、渦糸になるとその特異点上方に急勾配が出現している。

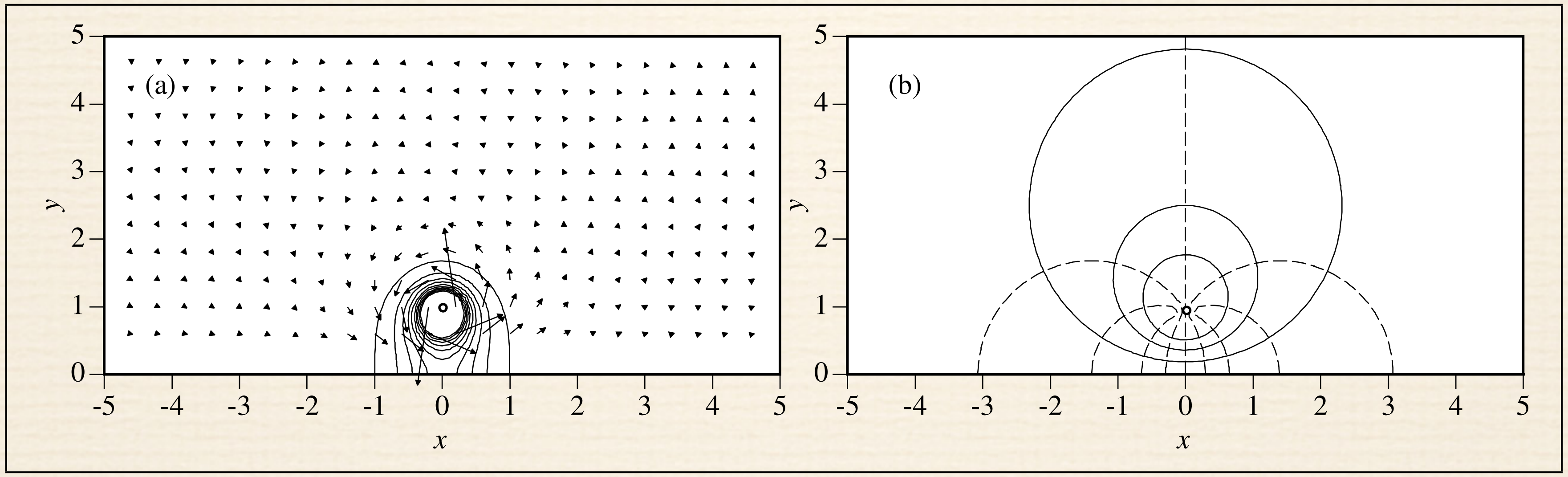


図 2.14　壁面側の渦糸流れの解 (a) 速度ベクトル図と等圧線図、(b) 流線 (実線) と速度ポテンシャルの等値線 (点線)

解5（負冪関数）

複素速度ポテンシャル

$$f=-\frac{\mu}{z}=-\frac{\mu}{r}\cos\theta-i\frac{\mu}{r}\sin\theta$$

速度ポテンシャル　　　　　流れ関数

$$\Phi=-\frac{\mu}{r}\cos\theta \qquad \Psi=-\frac{\mu}{r}\sin\theta$$

⬇

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}=0$$ を満足する。

$$f = -\frac{\mu}{z} \xrightarrow{\text{微分}} \frac{df}{dz} = u - iv = \frac{\mu}{z^2}$$

$$u = \frac{\mu\cos 2\theta}{r^2} = \frac{2\mu r^2\cos^2\theta - \mu r^2}{r^4} = \frac{\mu\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

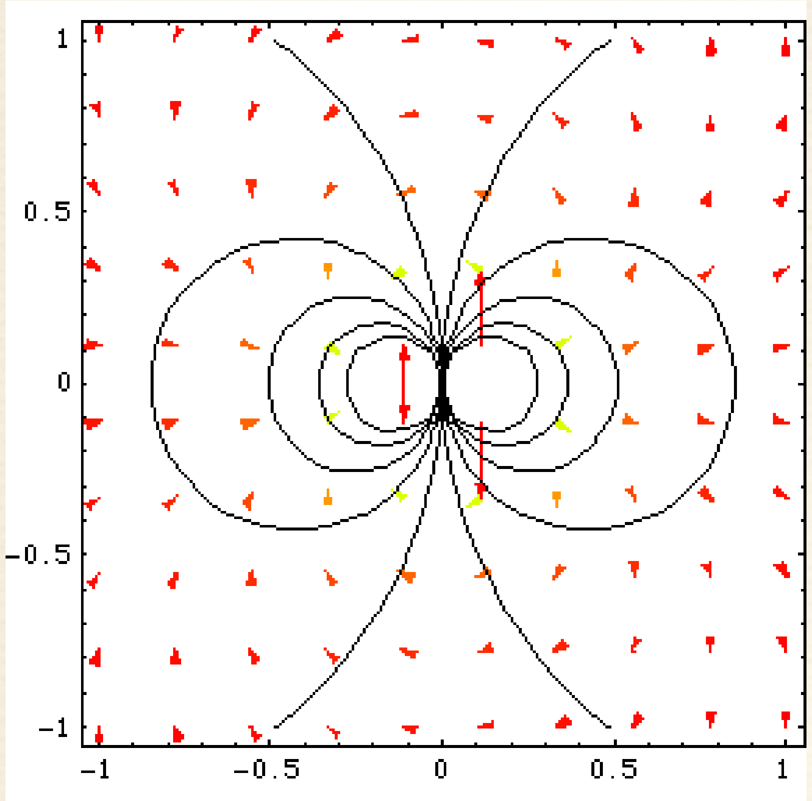
$$v = \frac{\mu\sin 2\theta}{r^2} = \frac{2\mu xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

ベリヌーイの定理

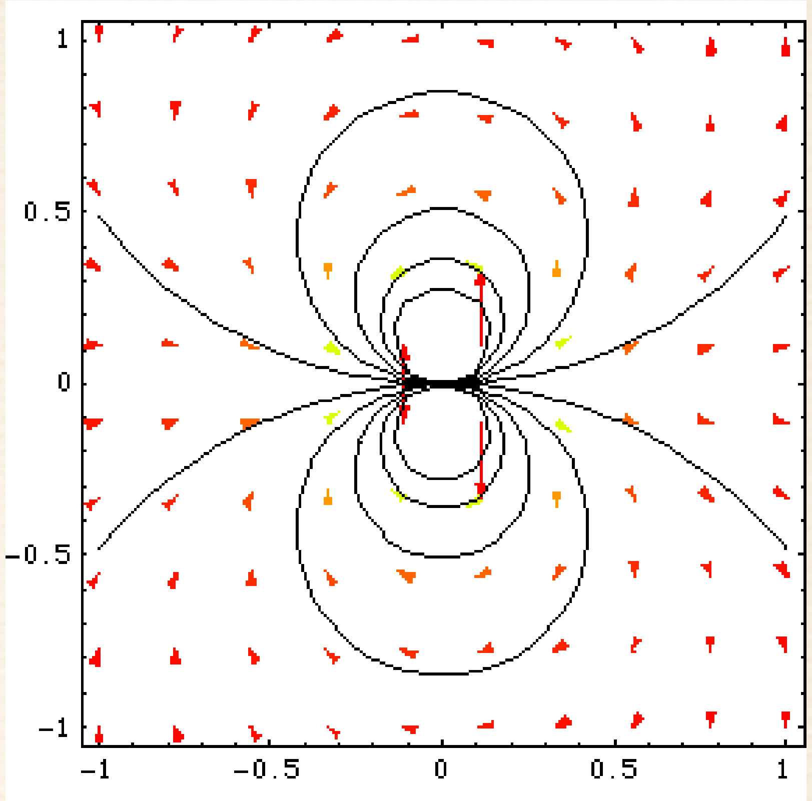
$$p = p_\infty - \frac{\rho\mu}{r^4} \longleftarrow \frac{1}{2}\left|\mathbf{u}\right|^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}\left|0\right|^2 + \frac{p_\infty}{\rho}$$

２重わき出し吸い込み

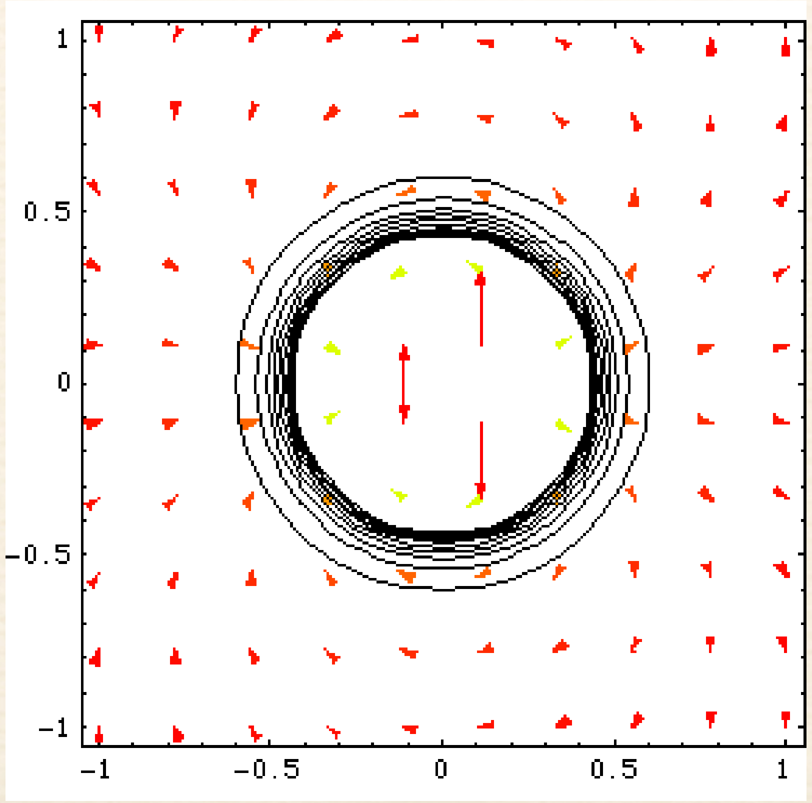
速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



圧力と速度ベクトル



解6（円柱周りの流れ）

一様流れと２重わき出し吸い込みの線形結合

複素速度ポテンシャル

$$f = Uz + \frac{Ua^2}{z}$$

$$f = Uz + \frac{Ua^2}{z}$$

速度ポテンシャル

$$\Phi = Ux + \frac{Ua^2 x}{x^2 + y^2}$$

流れ関数

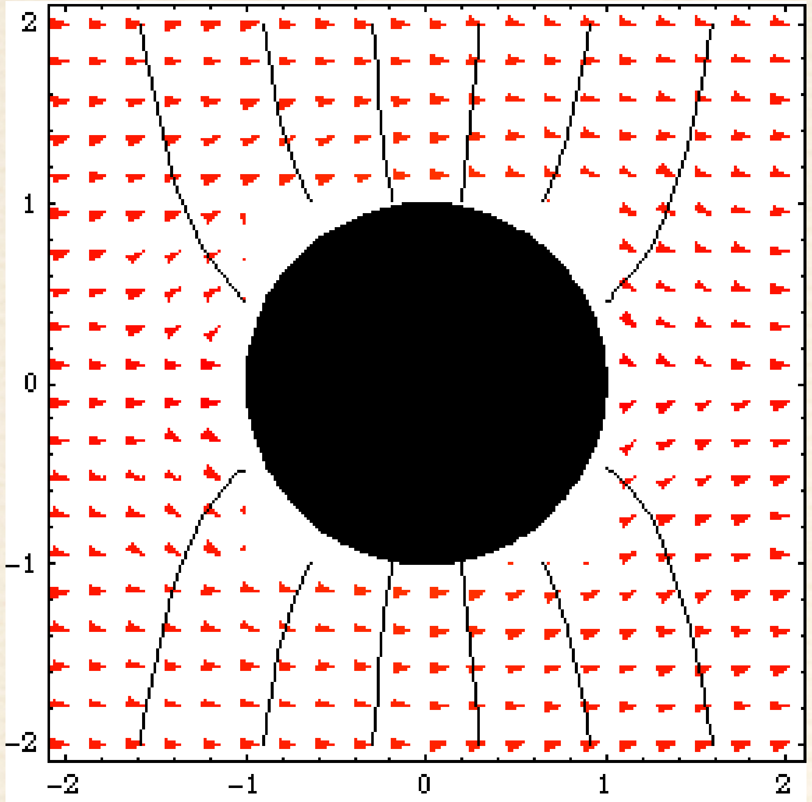
$$\Psi = Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U - \frac{Ua^2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

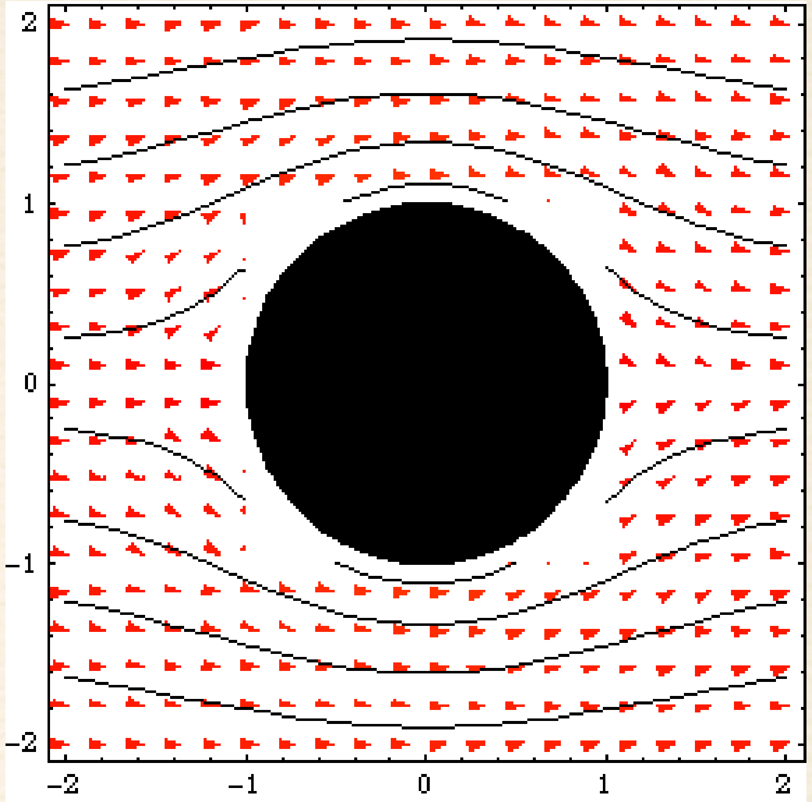
$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2Ua^2 xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} - \frac{1}{2}U^2 a^2 \frac{a^2 - 2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

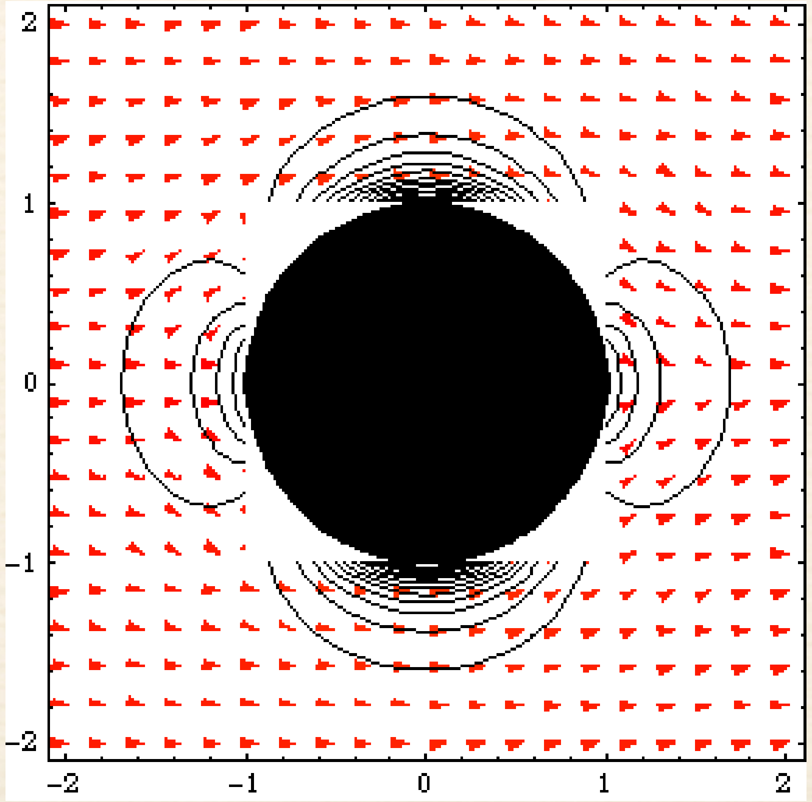
速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



圧力と速度ベクトル



解6（円柱周りの流れ+循環）

一様流れと２重わき出し吸い込みと渦糸の線形結合

複素速度ポテンシャル

$$f = Uz + \frac{Ua^2}{z} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\log z$$

$$f = Uz + \frac{Ua^2}{z} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\log z$$

速度ポテンシャル

$$\Phi = Ux + \frac{Ua^2 x}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

流れ関数

$$\Psi = Uy - \frac{Ua^2 y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\log\left(x^2 + y^2\right)$$

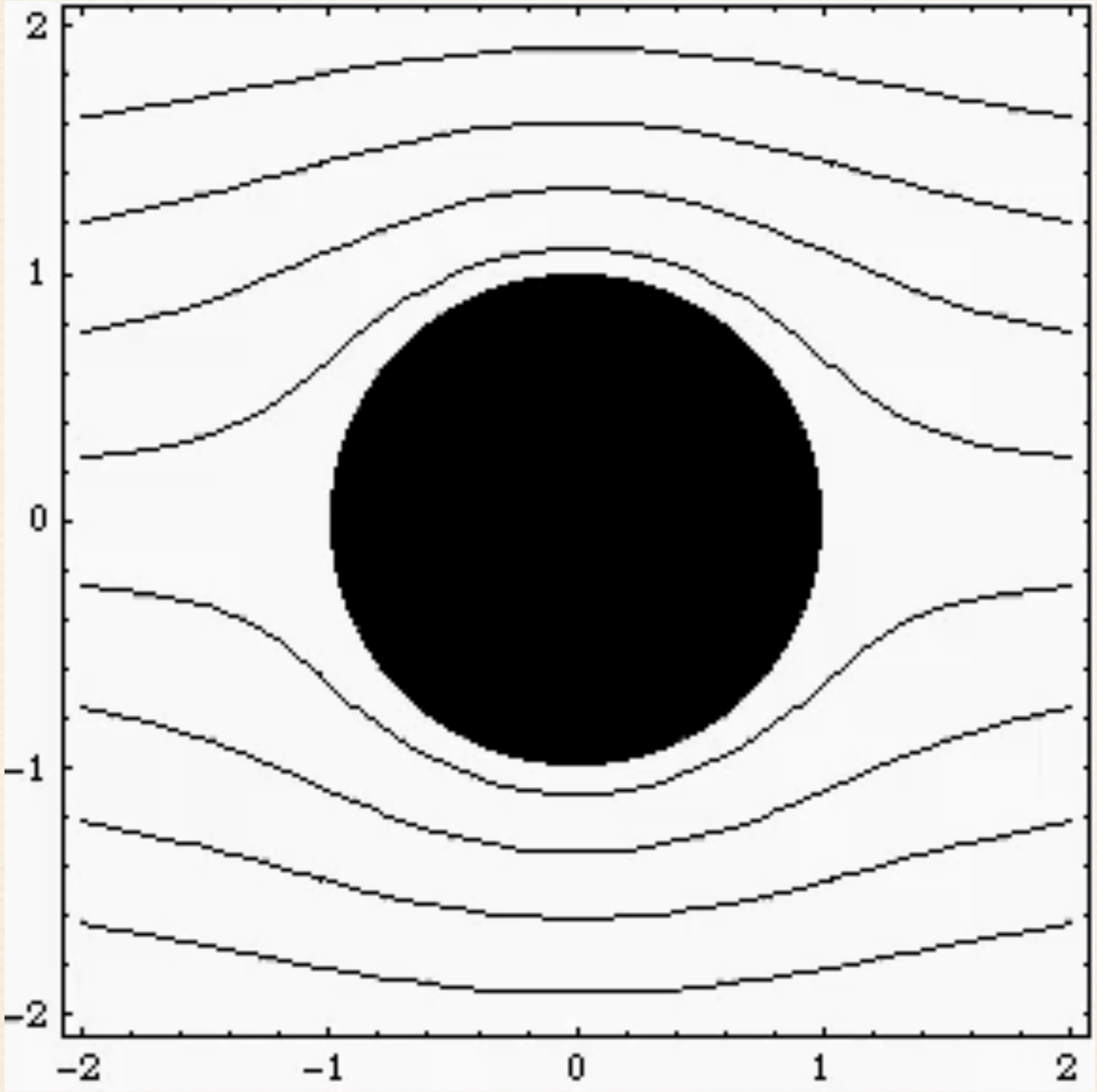
解析解

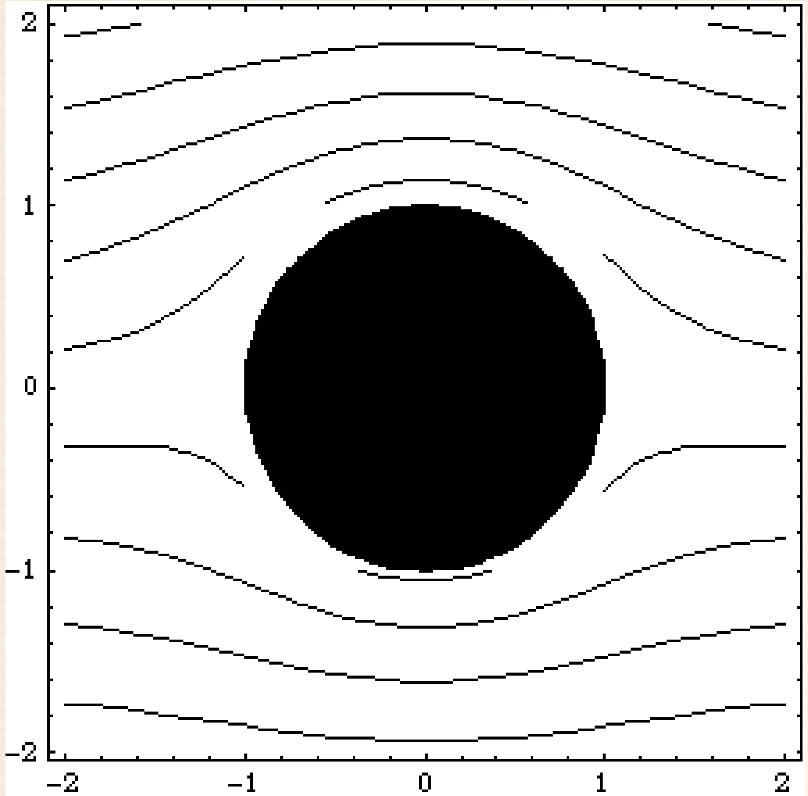
$$u = U - \frac{Ua^2\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{\Gamma}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$v = -\frac{2Ua^2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} - \frac{\Gamma}{\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}$$

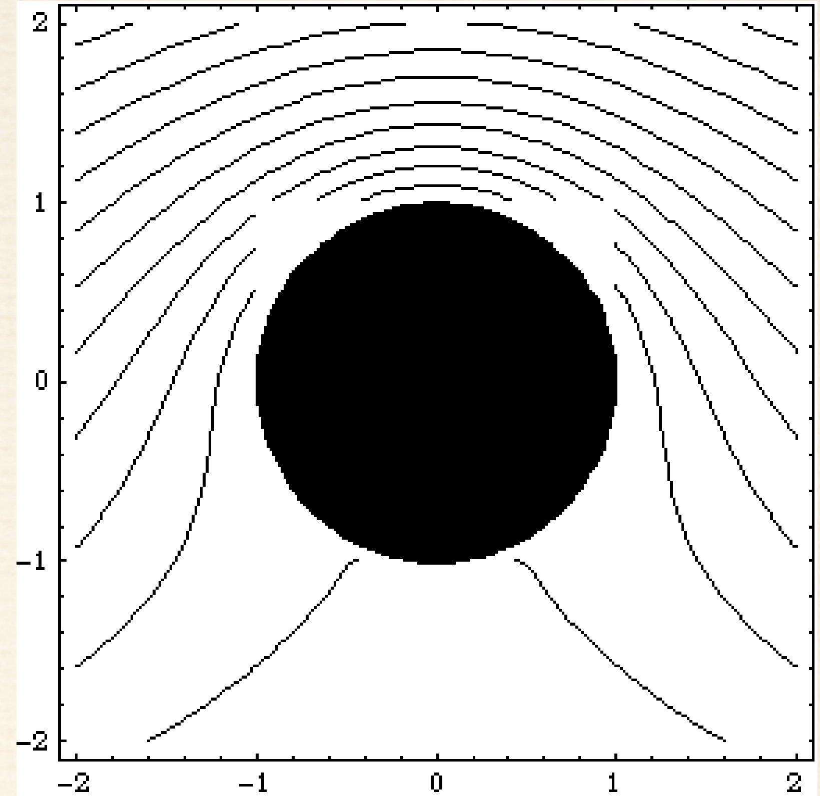
$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 - \frac{1}{2}\rho\left|\mathbf{u}\right|^2$$

流線図（Γ変更による動画）

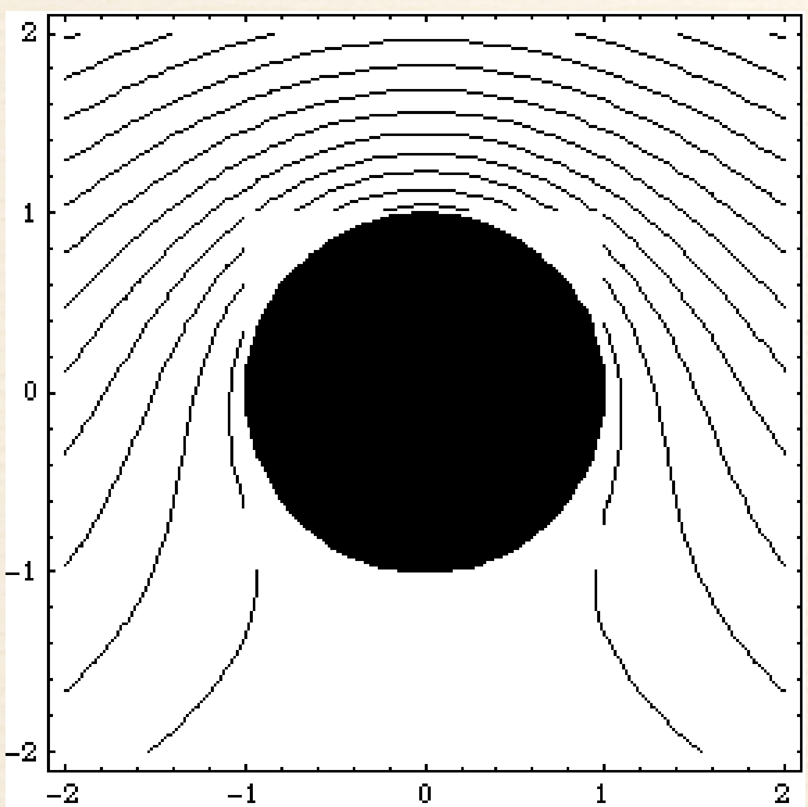




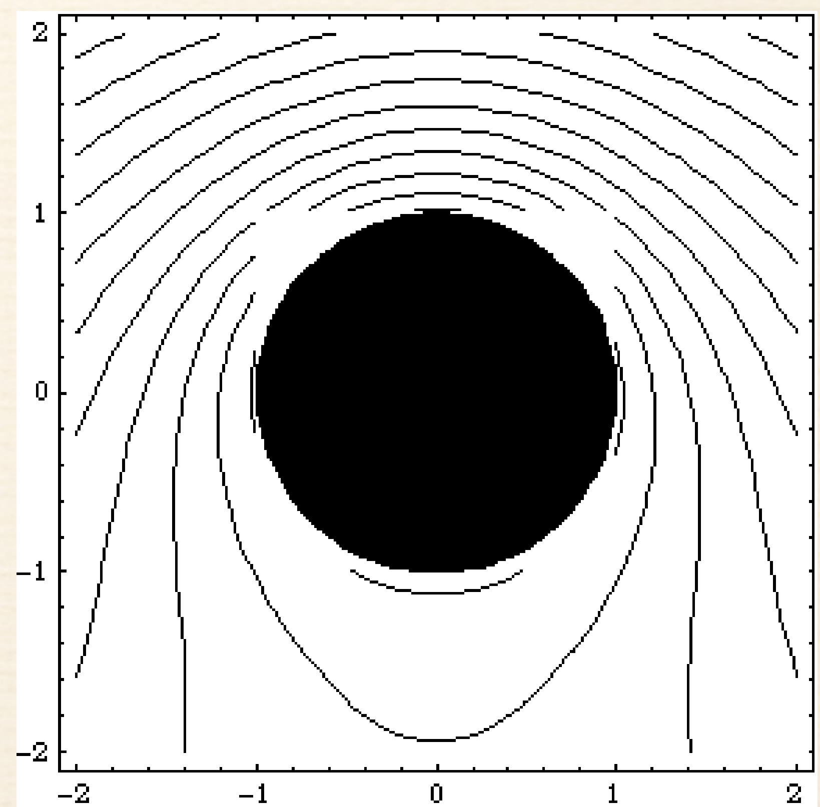
$\Gamma = 0.4\pi Ua$



$\Gamma = 3.6\pi Ua$

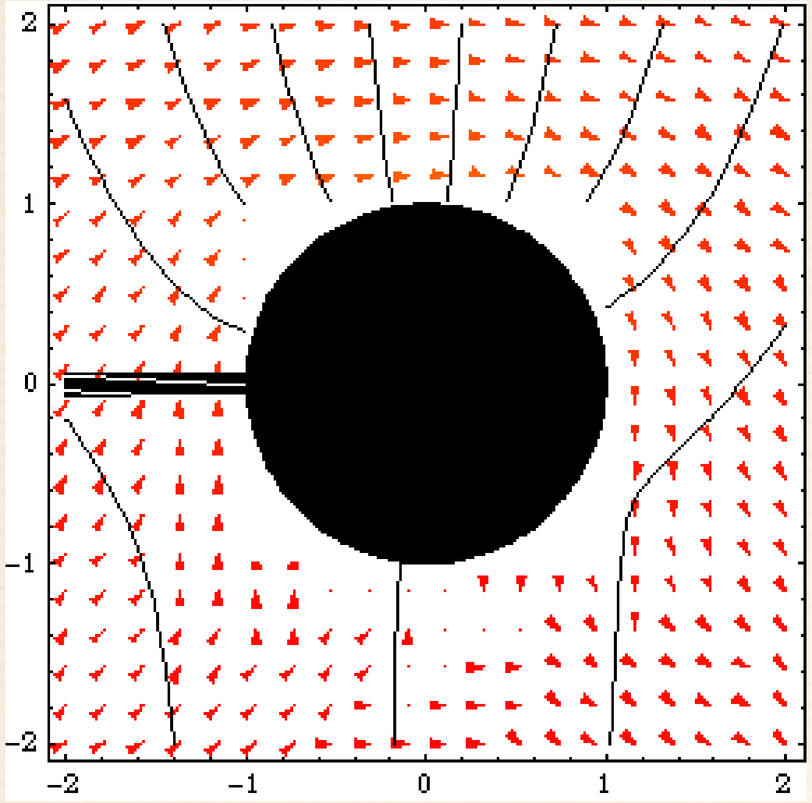


$\Gamma = 4\pi Ua$

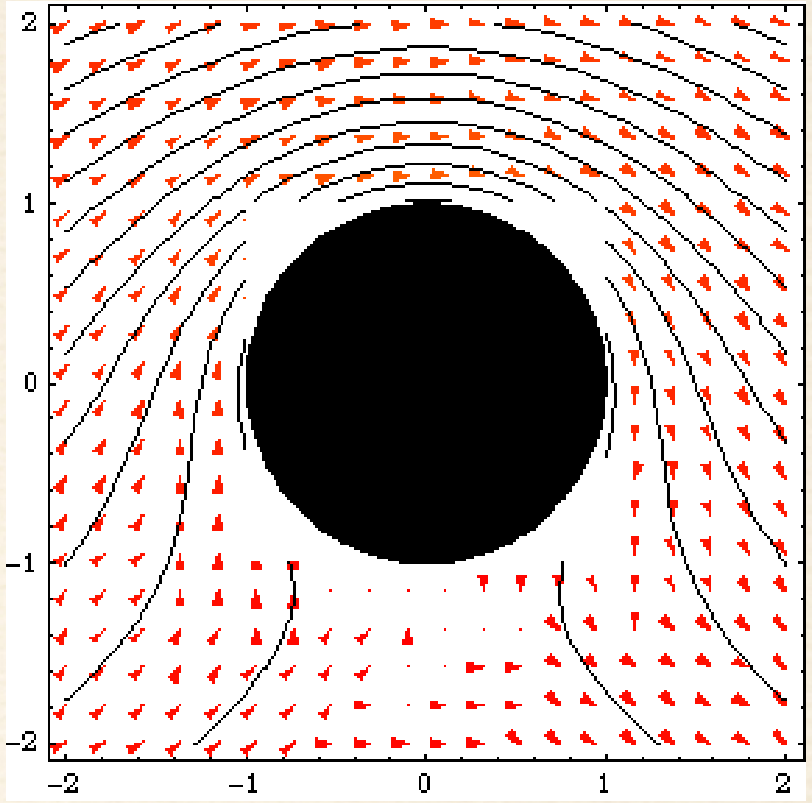


$\Gamma = 6\pi Ua$

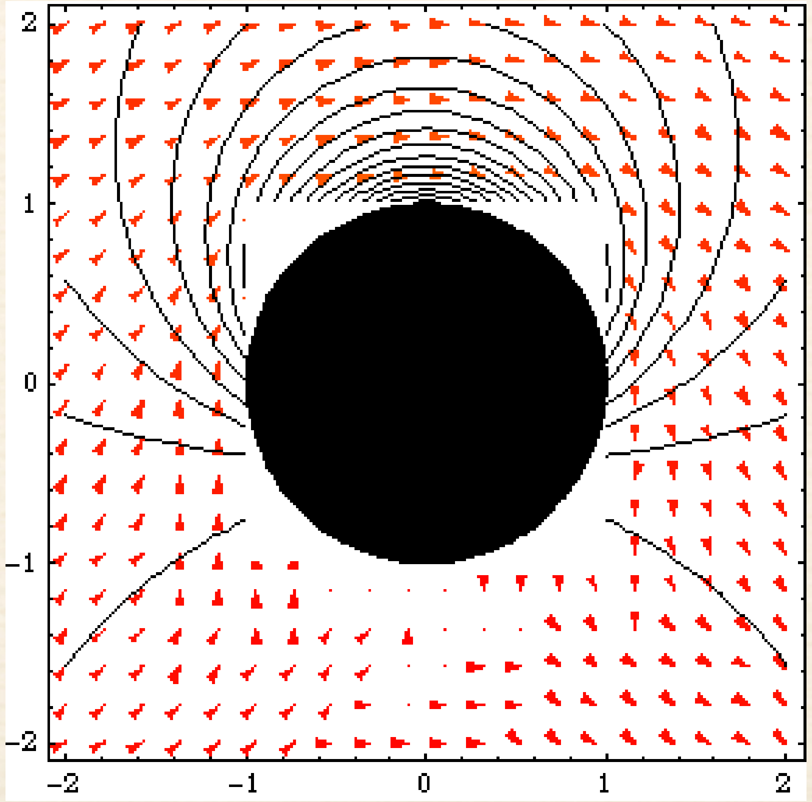
速度ポテンシャルと速度ベクトル



流線と速度ベクトル



圧力と速度ベクトル



$$\Gamma = 4\pi U a$$