# モーメントまとめ

講義「確率・統計」第２回目

# 各種モーメント

　モーメントは“**積率**”という日本語訳であり、「確率変数の掛け算で構成される統計量」と解される。「長さであれば面積、体積」や「速度であれば運動エネルギー」など周辺との関連性は高い。そこで本講義では３種類のモーメントを利用していく。

　それらは通常の**モーメント** $m_k$、**0周りのモーメント** $o_k$、**階乗モーメント** $\varphi_k$ の３つである。互いに関連しあい、理解を相補的に向上させられる。**キュムラント**も関連あり。

## 各種モーメントを導入する訳

　この世には様々な確率分布が存在するが、それぞれが個性を有しており、それぞれに向いたモーメントがある。よって色々な確率分布を理解するには色々なモーメントを理解する必要がある。

『個人的見解』

　数理物理学における真の理解は無限次オーダーまでの把握が必要不可欠であり、その導出にはモーメントの種類選択が非常に重要である。

# モーメント

　平均$\mu$を基準に揺動を定義し、一般に揺らぎや乱れと呼ばれる揺動量の$k$乗を持って$k$次のモーメントとする。

$$m_k = E\left[(x-\mu)^k\right] = \sum_{All}(x-\mu)^k p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-\mu)^k f(x)$$

正規分布、ラプラス分布、レイリー分布ではこのモーメントが算出し易い。

　最終的にはこのモーメントが最も一般性が高いので重要となる。

# ０周りのモーメント

　確率変数ゼロを基準にし、つまり確率変数自体のべき乗に関する期待値により定義される。$x$の$k$乗で$k$次の０周りのモーメントとする。

$$o_k = E\left[x^k\right] = \sum_{All} x^k p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^k f(x)$$

一様分布、三角分布、指数分布、ワイブル分布ではこのモーメントが算出し易い。

　最終的には０周りのモーメントから通常のモーメントに換算する必要がある。

# 階乗モーメント

　$x$の階乗を$(x\text{-}k)$の階乗で除したものに関する統計量である。$x$が離散的でないと定義できない。

$$\varphi_k = E\left[\frac{x!}{(x-k)!}\right] = \sum_{All}\frac{x!}{(x-k)!}p(x) = \sum_{All} x\cdot(x-1)\cdots(x-k+1)\,p(x)$$

組合せや階乗などが利用されて与えられている離散分布ではこのモーメントが算出し易い。

　最終的にはこの階乗モーメントから通常のモーメントに換算する必要がある。

# O周りのモーメント→モーメントの公式

$$\mu = o_1$$

$$m_2 = o_2 - \mu^2$$

$$m_3 = o_3 - 3\mu o_2 + 2\mu^3$$

$$m_4 = o_4 - 4\mu o_3 + 6\mu^2 o_2 - 3\mu^4$$

演習問題にもありますので、自分でこれらの関係式が成立することを証明できるようにしておきましょう。

# 階乗モーメント→モーメントの公式

$$\mu = \varphi_1$$

$$m_2 = \varphi_2 + \mu(1-\mu)$$

$$m_3 = \varphi_3 + 3(1-\mu)\varphi_2 + \mu(1-\mu)(1-2\mu)$$

$$m_4 = \varphi_4 + 2(3-2\mu)\varphi_3 + \left(7-12\mu+6\mu^2\right)\varphi_2 + \mu(1-\mu)\left(1-3\mu+3\mu^2\right)$$

演習問題にもありますので、自分でこれらの関係式が成立することを証明できるようにしておきましょう。