確率・統計

特性関数のまとめ

特性関数とは

- ”特性関数”とは確率関数または確率密度関数をフーリエ変換して得られる１対１の関数である。
- 変換の際にすでに和または１階積分をしているので統計量の評価においてその数学処理が省略できる優れものである。
- 離散分布でも特性関数は連続関数となるので微分などが可能となる。

特性関数の定義

- 定義

$$\tilde{f}(\xi) = E\left[e^{i\xi x}\right] = \sum_x e^{i\xi x} p(x)$$ 離散分布

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\xi x} f(x)$$ 連続分布

指数関数無限級数展開 $$e^{i\xi x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} x^n$$

$$\tilde{f}(\xi) = E\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} E\left[x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} o_n$$

特性関数は0周りのモーメントの集合体

0周りのモーメントの導出公式

平均 $$\mu = -i \left. \frac{\partial \tilde{f}(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$$

２次 $$o_2 = -\left. \frac{\partial^2 \tilde{f}(\xi)}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0}$$

３次 $$o_3 = i \left. \frac{\partial^3 \tilde{f}(\xi)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0}$$

４次 $$o_4 = \left. \frac{\partial^4 \tilde{f}(\xi)}{\partial \xi^4} \right|_{\xi=0}$$

積分するよりは微分の方が簡単に求まるのでは！

（例）幾何分布でのモーメント算出.1

特性関数　$\tilde{f}(\xi) = \dfrac{pe^{i\xi}}{1 - e^{i\xi}(1-p)}$

特性関数の１階微分

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} = \frac{ipe^{i\xi}\left\{1 - e^{i\xi}(1-p)\right\} - pe^{i\xi}\left\{-ie^{i\xi}(1-p)\right\}}{\left\{1 - e^{i\xi}(1-p)\right\}^2} = \frac{ipe^{i\xi}}{\left\{1 - e^{i\xi}(1-p)\right\}^2}$$

特性関数の１階微分にξ=0を代入

$$\left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{ip}{\left\{1 - (1-p)\right\}^2} = \frac{i}{p} \Rightarrow \mu = -i\left.\frac{\partial \tilde{f}(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -i\frac{i}{p} = \frac{1}{p}$$

（例）幾何分布でのモーメント算出.2

特性関数の２階微分

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{ipe^{i\xi}}{\left\{1-e^{i\xi}\left(1-p\right)\right\}^2} = \frac{-pe^{i\xi}-p\left(1-p\right)e^{2i\xi}}{\left\{1-e^{i\xi}\left(1-p\right)\right\}^3}$$

特性関数の２階微分にξ=0を代入

$$\left.\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = \frac{-p-p\left(1-p\right)}{\left\{1-\left(1-p\right)\right\}^3} = \frac{p-2}{p^2} \Rightarrow o_2 = -\left.\frac{\partial^2 \tilde{f}\left(\xi\right)}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=0} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = o_2 - \mu^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$