確率分布いろいろ

静岡大学工学部機械工学科
岡本正芳

離散分布

(Discrete distribution)

離散型一様分布(Discrete uniform distribution)

- コインやさいころなどを振るといった個々の発生事象が等確率で生じる場合の確率分布

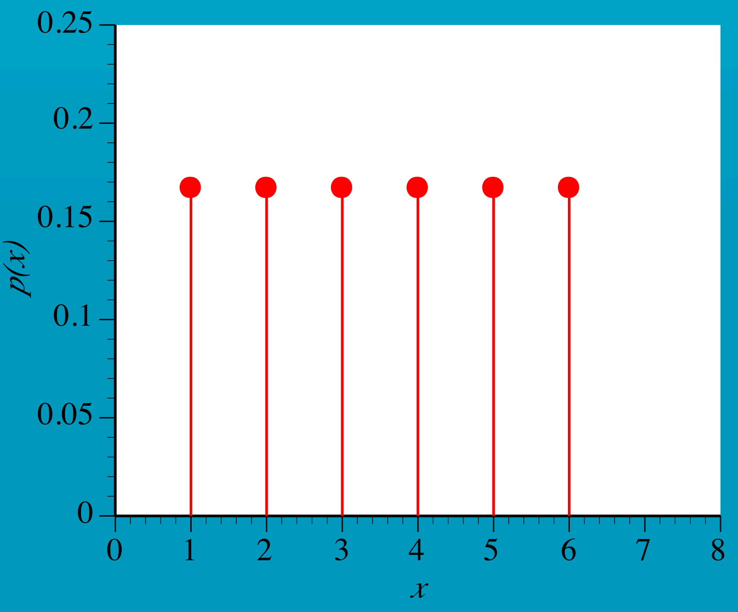
- 確率変数の自由度は生じる事象の総数

$$x = 1, 2, 3, \cdots, n$$

- 確率関数

$$p(x) = \frac{1}{n}$$

さいころ　n=6



離散型一様分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\sum_{x=1}^{n} p(x) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1$$

- 平均

$$\mu = \sum_{x=1}^{n} xp(x) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\mu = \frac{7}{2} \quad (n=6)$$

離散型一様分布の統計量.2

- ２乗量の期待値

$$o_2 = \sum_{x=1}^{n} x^2 p(x) = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

- 分散

$$\sigma^2 = o_2 - \mu^2 = \frac{(n-1)(n+1)}{12} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71 \quad (n=6)$$

離散型一様分布では自然数の冪和の公式が大事

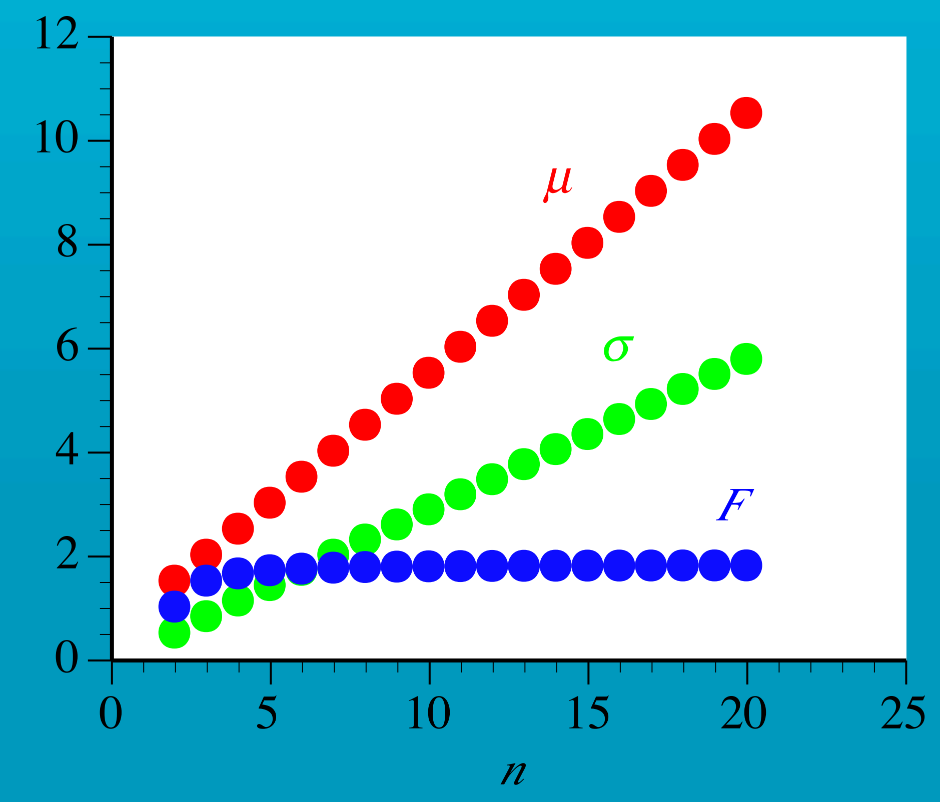
離散型一様分布の統計量.3

- スキューネス　$S=0$　対称性
- フラットネス

$$F=1.8-\frac{12}{5(n-1)(n+1)}$$

$$\underset{n=2}{\longrightarrow}1$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1.8$$

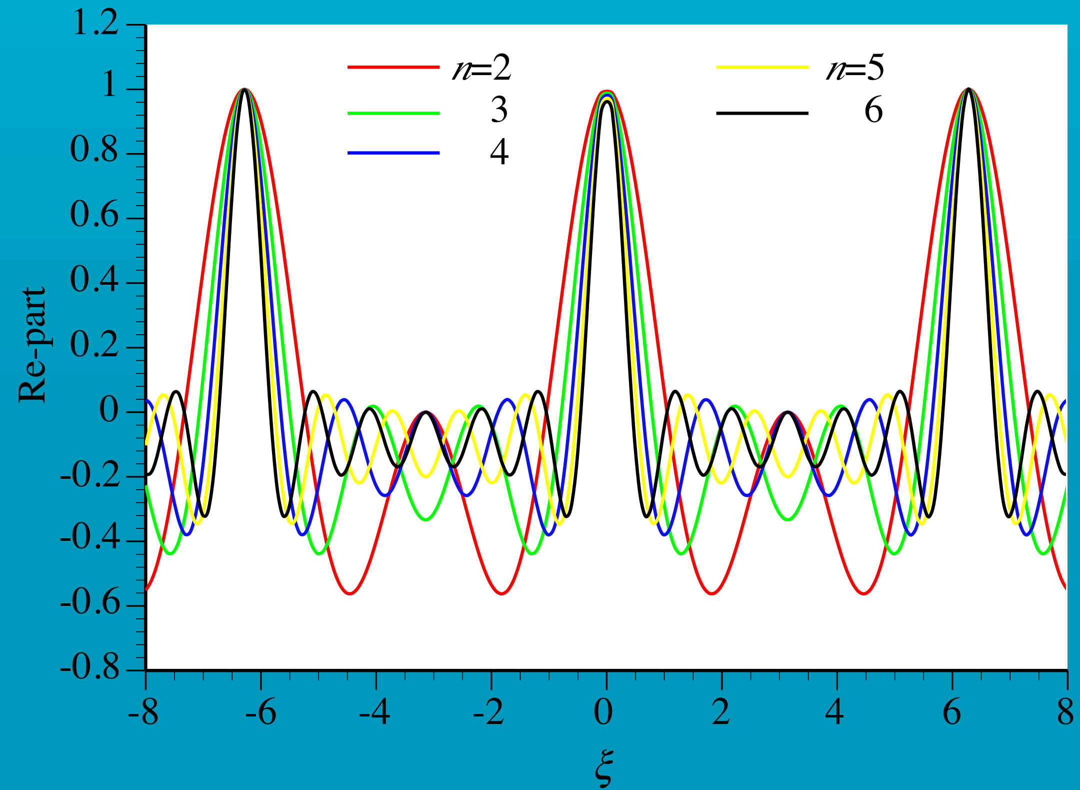


離散型一様分布の統計量.4

- 特性関数

$$\tilde{f}(\xi)=\sum_{x=1}^{n}e^{i\xi x}p(x)=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}e^{i\xi x}=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}\left(e^{i\xi}\right)^{x}$$

$$=\frac{e^{i\xi}\left(e^{in\xi}-1\right)}{n\left(e^{i\xi}-1\right)}$$



幾何分布(Geometric distribution)

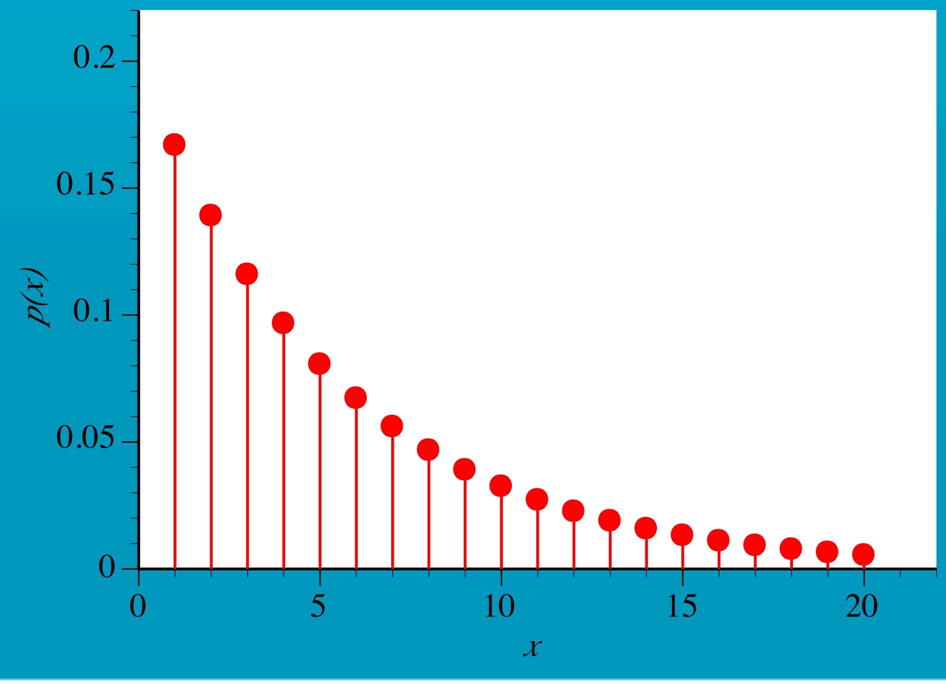
- コインやさいころなどによるベルヌーイの試行において初めてx回目に目的の事象が起きるかを表した確率分布

１からスタートだよ！

- 確率変数　$x = 1, 2, 3, \cdots, \infty$
- 確率関数　$p(x) = p(1-p)^{x-1}$

$$0 < p < 1$$

さいころ　p=1/6



幾何分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\sum_{x=1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} p(1-p)^{x-1} = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

- 平均

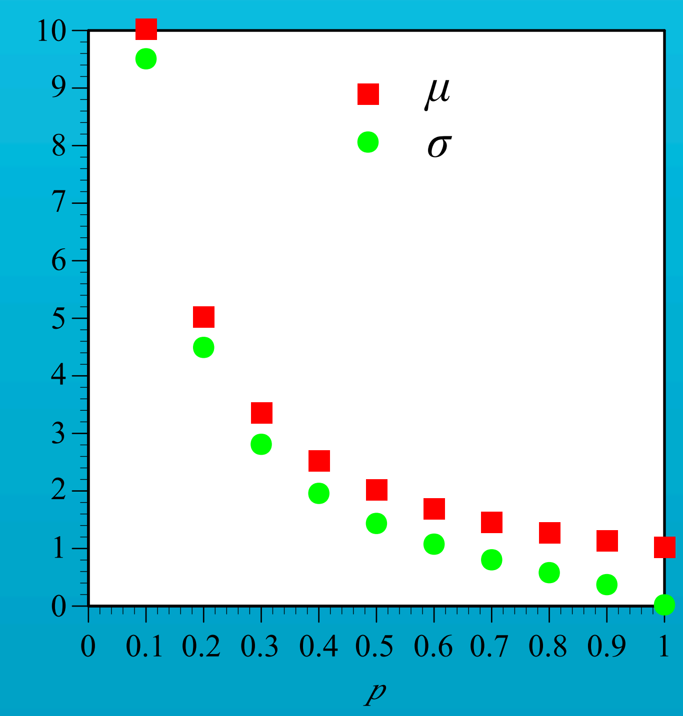
$$\mu = \sum_{x=1}^{\infty} xp(x) = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} = \frac{1}{p} \qquad \mu = 6 \ \left(p = \frac{1}{6}\right)$$

幾何分布の統計量.2

- ２乗量の期待値

$$o_2=\sum_{x=1}^{\infty}x^2p(x)=p\sum_{x=1}^{\infty}(x+1)x(1-p)^{x-1}$$

$$-p\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}=\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$$



- 分散

$$\sigma^2=o_2-\mu^2=\frac{1-p}{p^2}\qquad \sigma=\sqrt{30}\quad\left(p=\frac{1}{6}\right)$$

幾何分布では等比数列の和の公式が大事

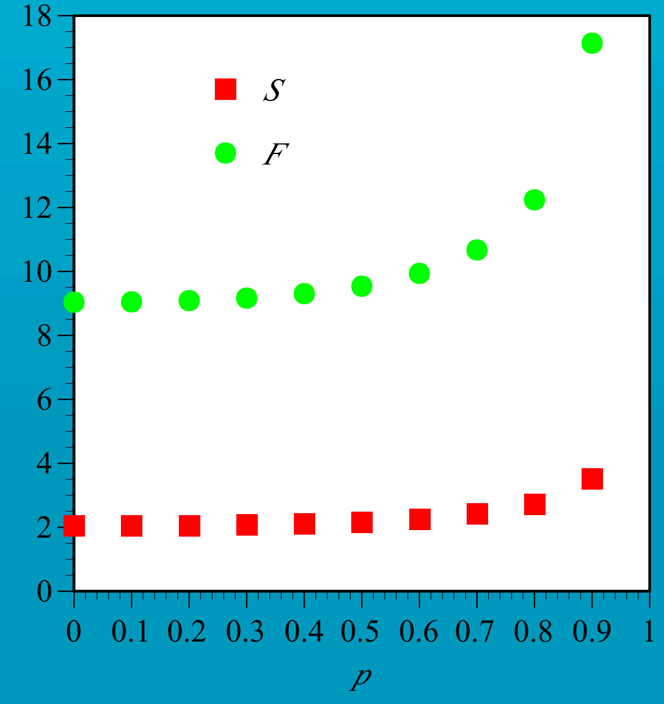
幾何分布の統計量.3

- スキューネス

$$S = \frac{(2-p)}{\sqrt{1-p}}$$

- フラットネス

$$F = \frac{9 - 9p + p^2}{1-p}$$



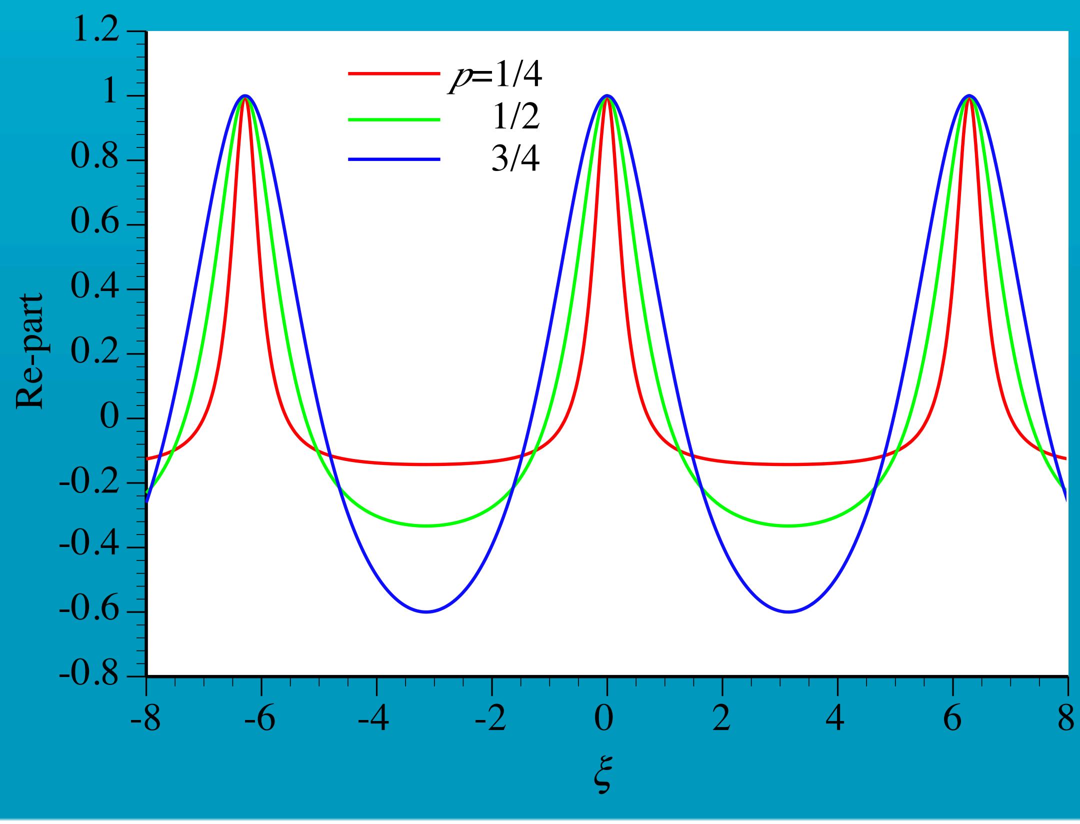
幾何分布の統計量.4

- 特性関数

$$\tilde{f}(\xi)=\sum_{x=1}^{\infty}e^{i\xi x}p(x)=\sum_{x=1}^{\infty}e^{i\xi x}p(1-p)^{x-1}$$

$$=\frac{p}{(1-p)}\sum_{x=1}^{\infty}\left\{e^{i\xi}(1-p)\right\}^{x}$$

$$=\frac{pe^{i\xi}}{1-e^{i\xi}(1-p)}$$



２項分布(Binary distribution)

詳細はいずれ！

ポアソン分布(Poisson distribution)

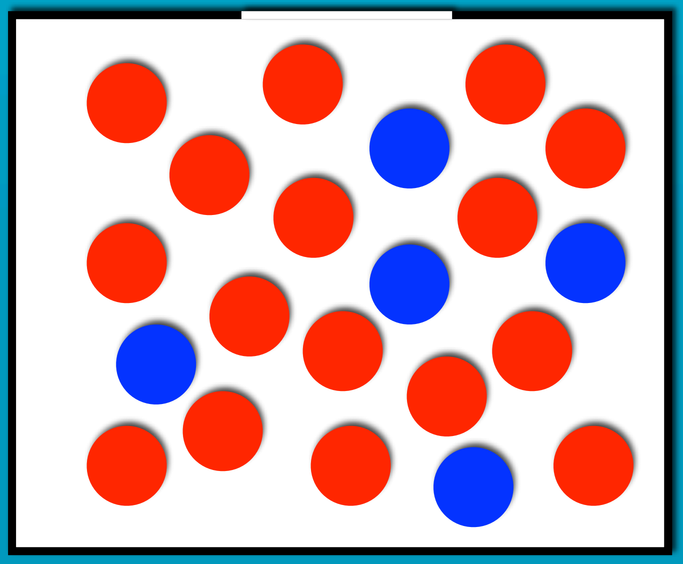
- 詳細はいずれ！

超幾何分布(Hypergeometric distribution)

- あたり玉がN_1個、はずれ玉がN_0個入った箱からn個玉を取り出し、その中にx個のあたり玉を引く非復元抽出に関する離散分布

$$p(x) = \frac{{}_{N_1}C_x \cdot {}_{N_0}C_{n-x}}{{}_{N_0+N_1}C_n}$$

$$x = 0, 1, 2, \cdots, n$$



０からスタートだよ！

ヴァンデルモンド恒等式

$$\sum_{i=0}^{m} {}_N C_i \cdot {}_M C_{m-i} = {}_{N+M} C_m$$

- この公式が超幾何分布では最も重要になる公式である。
- この公式が全確率を意味する方程式そのものである。

k次の階乗モーメント

$$\varphi_k = \frac{{}_{N_1}C_k \cdot {}_nC_k}{{}_{N_1+N_0}C_k} k!$$

導出はp.36と37を参照せよ！

平均　$$\mu = \varphi_1 = \frac{{}_{N_1}C_1 \cdot {}_nC_1}{{}_{N_1+N_0}C_1} 1! = \frac{nN_1}{N_0 + N_1}$$

分散　$$\sigma^2 = \varphi_2 + \mu(1-\mu) = \frac{{}_{N_1}C_2 \cdot {}_nC_2}{{}_{N_1+N_0}C_2} 2! + \frac{nN_1}{N_0 + N_1}\left(1 - \frac{nN_1}{N_0 + N_1}\right)$$

$$= \frac{nN_1N_0(N_0 + N_1 - n)}{(N_0 + N_1)^2(N_0 + N_1 - 1)}$$

スキューネス●フラットネス

$$S=\frac{\sqrt{N_0+N_1-1}\left(N_0-N_1\right)\left(N_0+N_1-2n\right)}{\sqrt{nN_0N_1\left(N_0+N_1-n\right)}\left(N_0+N_1-2\right)}$$

$$F=\frac{\left(N_0+N_1-1\right)}{nN_0N_1\left(N_0+N_1-n\right)\left(N_0+N_1-2\right)\left(N_0+N_1-3\right)}$$

$$\times\Big(6n^2N_0^2-6n^2N_0N_1-3n^2N_0N_1^2-3n^2N_0^2N_1+6n^2N_1^2$$

$$+3nN_0N_1^3-6nN_1^3+6nN_0^2N_1^2+3nN_0^3N_1-6nN_0^3$$

$$+N_1^4-2N_0N_1^3-6N_0^2N_1^2-2N_0^3N_1+N_0^4+\left(N_0+N_1\right)^3\Big)$$

特性関数

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{{}_{N_0}C_n}{{}_{N_0+N_1}C_n}\,{}_2F_1\left(-n,-N_1;N_0-n-1;e^{i\xi}\right)$$

超幾何関数p.169

超幾何関数が超幾何分布の名前の由来

超幾何分布と２項分布.1

- それぞれの階乗モーメント

超幾何分布

$$\varphi_k^H = \frac{{}_{N_1}C_k \cdot {}_nC_k}{{}_{N_1+N_0}C_k} k!$$

２項分布

$$\varphi_k^B = \frac{n!}{(n-k)!} p^k$$

$$\varphi_k^H \xrightarrow[\substack{N_0+N_1\to\infty \\ p=\frac{N_1}{N_0+N_1}}]{} \varphi_k^B$$

証明

$$\varphi_k^H = \frac{{}_{N_1}C_k \cdot {}_nC_k}{{}_{N_1+N_0}C_k}k! = \frac{\dfrac{N_1(N_1-1)\cdots(N_1-k+1)}{k!}\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}}{\dfrac{(N_0+N_1)(N_0+N_1-1)\cdots(N_0+N_1-k+1)}{k!}}k!$$

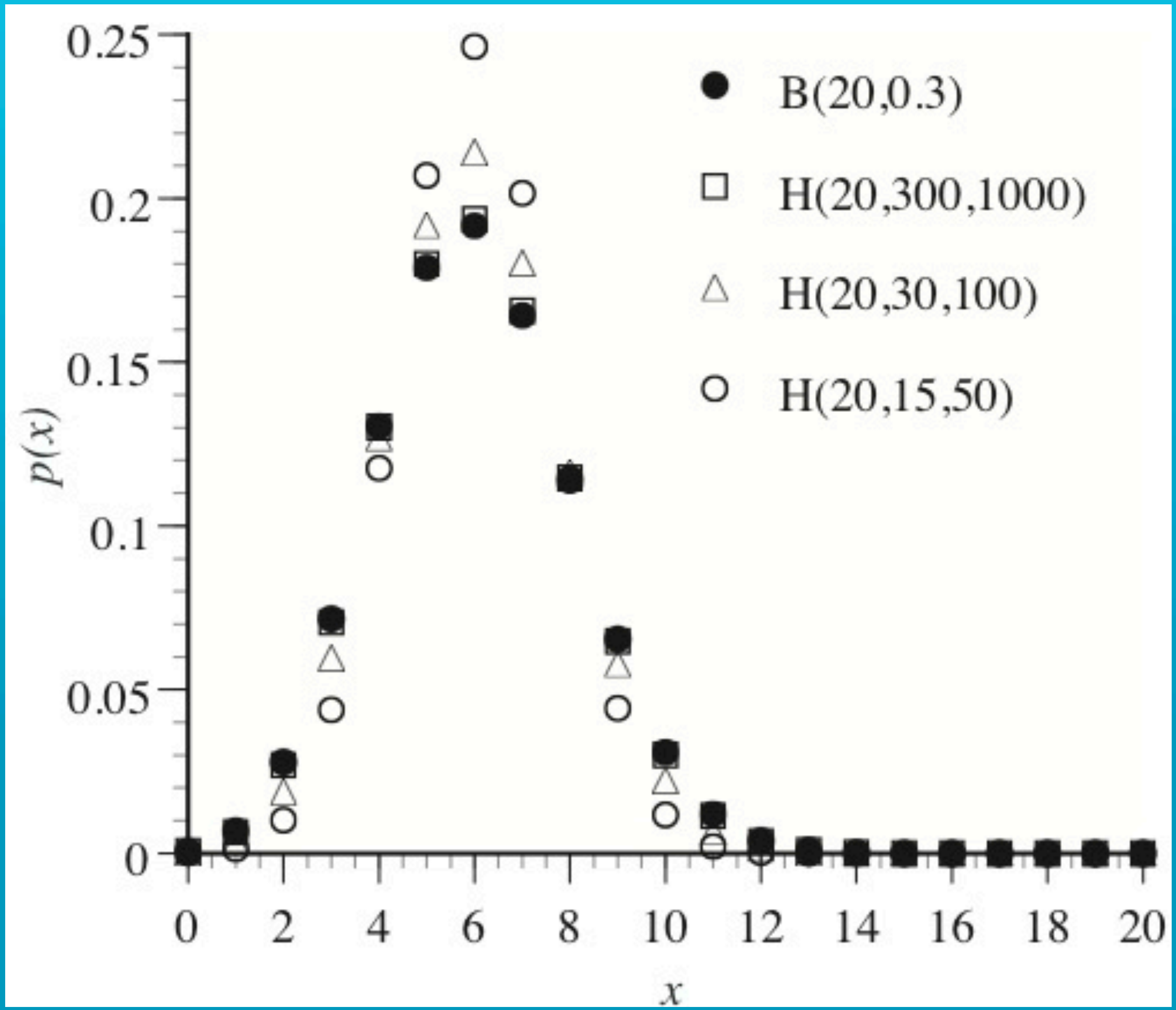
$$= \frac{N_1(N_1-1)\cdots(N_1-k+1)}{(N_0+N_1)(N_0+N_1-1)\cdots(N_0+N_1-k+1)}n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

$$= \frac{\dfrac{N_1}{N_0+N_1}\left(\dfrac{N_1}{N_0+N_1}-\dfrac{1}{N_0+N_1}\right)\left(\dfrac{N_1}{N_0+N_1}-\dfrac{k-1}{N_0+N_1}\right)}{1\left(1-\dfrac{1}{N_0+N_1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{N_0+N_1}\right)}\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$p = \frac{N_1}{N_0+N_1}$$ 代入

$$= \frac{p\left(p-\cancel{\dfrac{1}{N_0+N_1}}\right)\left(p-\cancel{\dfrac{k-1}{N_0+N_1}}\right)}{1\left(1-\cancel{\dfrac{1}{N_0+N_1}}\right)\cdots\left(1-\cancel{\dfrac{k-1}{N_0+N_1}}\right)}\frac{n!}{(n-k)!} \xrightarrow[N_0+N_1\to\infty]{} \frac{n!}{(n-k)!}p^k = \varphi_k^B$$

超幾何分布と２項分布.2



連続分布

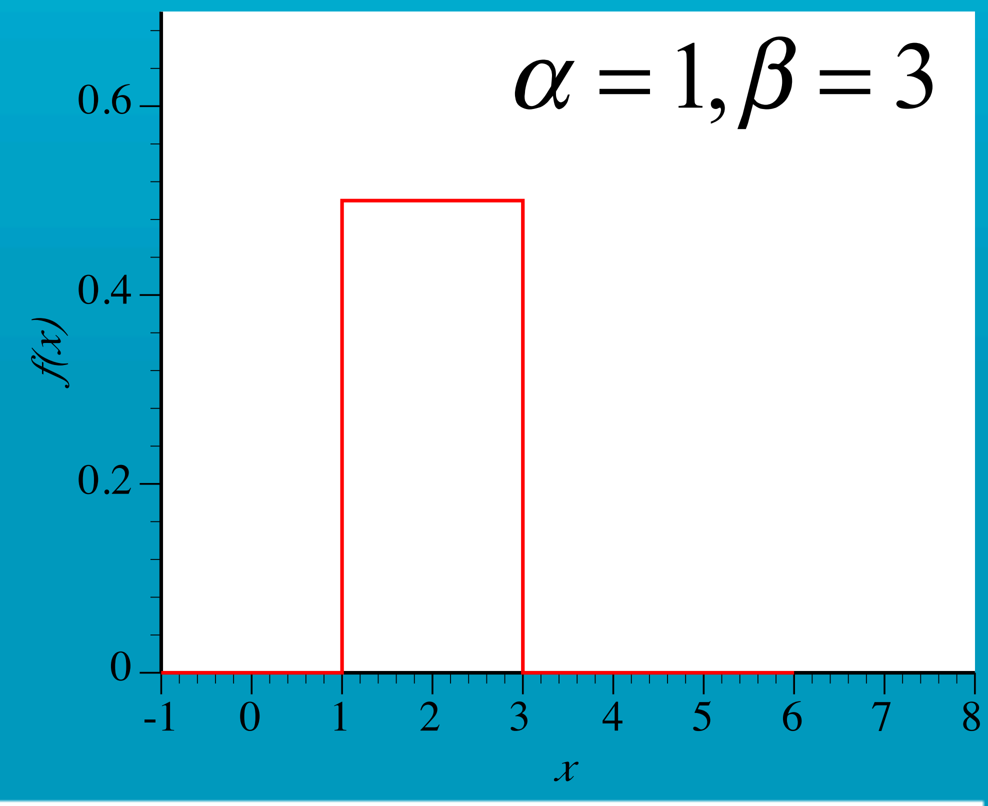
(Continuous distribution)

連続型一様分布(Continuous uniform distribution)

- ある範囲内の値が全て等確率で生じる確率分布で、乱数シミュレーションの基礎となるもの

- 確率変数と確率密度関数

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha \le x \le \beta \\ 0 & x \le \alpha \ \ or \ \ x \ge \beta \end{cases}$$



連続型一様分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dx \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[x\right]_{\alpha}^{\beta} = 1$$

- 平均

$$\mu = \int_{\alpha}^{\beta} dx\, x \frac{1}{\beta-\alpha} = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

平均値は分布が値とる範囲の中点

連続型一様分布の統計量.2

- ２乗量の期待値

$$o_2 = \int_\alpha^\beta dx x^2 \frac{1}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}$$

- 分散

$$\sigma^2 = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3} - \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$\sigma = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}$$

連続型一様分布の統計量.3

- スキューネス　$S=0$　対称性
- フラットネス　$F=1.8$
- 特性関数

$$\tilde{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{i\xi x}f(x)=\int_{\alpha}^{\beta}dxe^{i\xi x}\frac{1}{\beta-\alpha}$$

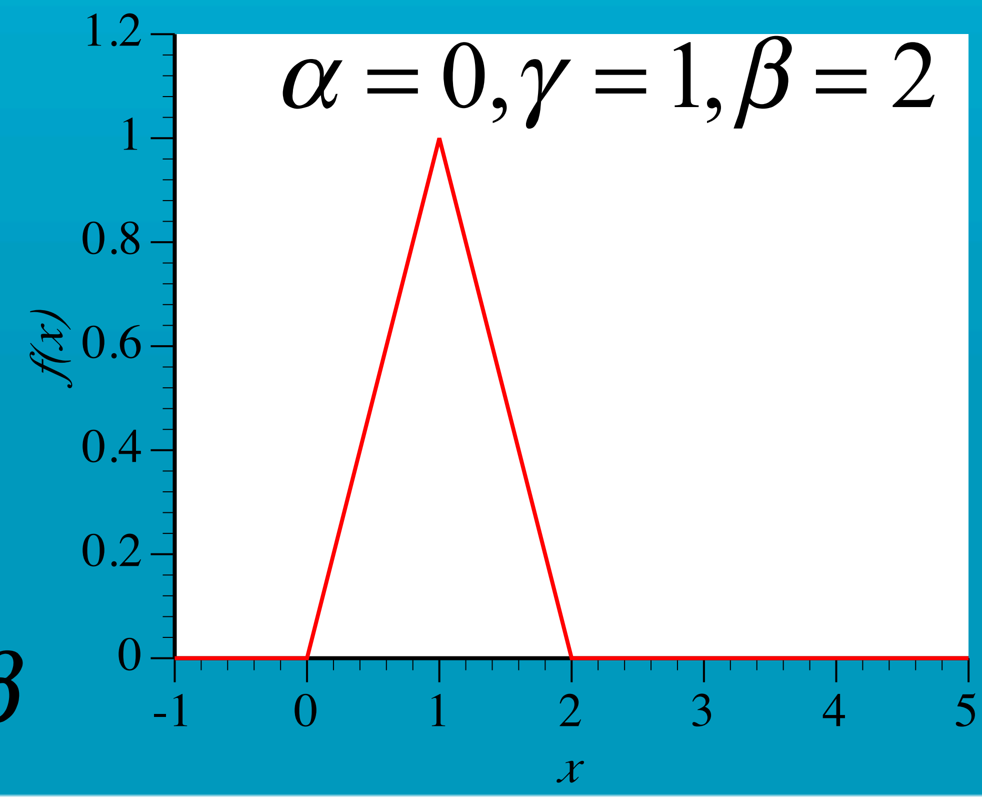
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{e^{i\xi x}}{i\xi}\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{e^{i\xi\beta}-e^{i\xi\alpha}}{i\xi(\beta-\alpha)}$$

三角分布(Triangular distribution)

- ある有限範囲内で一つの最大確率をもつ単純な確率分布で、乱数シミュレーションで利用される。

- 確率変数と確率密度関数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} & \alpha<x\le\gamma \\ \dfrac{2(\beta-x)}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} & \gamma<x\le\beta \\ 0 & x\le\alpha, x>\beta\end{cases}$$



三角分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \frac{2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int_{\alpha}^{\gamma} dx(x-\alpha) + \frac{2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\int_{\gamma}^{\beta} dx(\beta-x)$$

$$= \frac{(\gamma-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{(\beta-\gamma)^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = \frac{(\gamma-\alpha)}{(\beta-\alpha)} + \frac{(\beta-\gamma)}{(\beta-\alpha)} = 1$$

- 平均

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} dx x f(x) = \frac{2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int_{\alpha}^{\gamma} dx x(x-\alpha) + \frac{2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\int_{\gamma}^{\beta} dx x(\beta-x)$$

$$= \frac{(\gamma-\alpha)^2(2\gamma+\alpha)}{3(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} + \frac{(\beta-\gamma)^2(\beta+2\gamma)}{3(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

平均は最大確率の点が中点であるとき一致する

三角分布の統計量.2

- ２乗量の期待値

$$o_2=\int_{-\infty}^{\infty}dxx^2f(x)=\frac{2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int_{\alpha}^{\gamma}dxx^2(x-\alpha)+\frac{2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\int_{\gamma}^{\beta}dxx^2(\beta-x)$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)^2(3\gamma^2+2\alpha\gamma+\alpha^2)}{6(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\beta-\gamma)^2(3\gamma^2+2\beta\gamma+\beta^2)}{6(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{6}$$

- 分散

$$\sigma^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{6}-\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma}{18}$$

- 標準偏差

$$\sigma=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma}}{3\sqrt{2}}$$

三角分布の統計量.3

- スキューネス $S=\dfrac{\sqrt{2}\left(\alpha+\beta-2\gamma\right)\left(2\alpha-\beta-\gamma\right)\left(\alpha-2\beta+\gamma\right)}{5\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}$
- フラットネス $F=2.4$ 平均が最大確率のときのみゼロ
- 特性関数

$$\tilde{f}\left(\xi\right)=\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{i\xi x}f\left(x\right)=\int_{\alpha}^{\gamma}dxe^{i\xi x}\frac{2\left(x-\alpha\right)}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\gamma-\alpha\right)}+\int_{\gamma}^{\beta}dxe^{i\xi x}\frac{2\left(\beta-x\right)}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta-\gamma\right)}$$

$$=\frac{2\left(e^{i\gamma\xi}-e^{i\alpha\xi}\right)}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\gamma-\alpha\right)\xi^2}+\frac{2\left(e^{i\gamma\xi}-e^{i\beta\xi}\right)}{\left(\beta-\alpha\right)\left(\beta-\gamma\right)\xi^2}$$

指数分布(Exponential distribution)

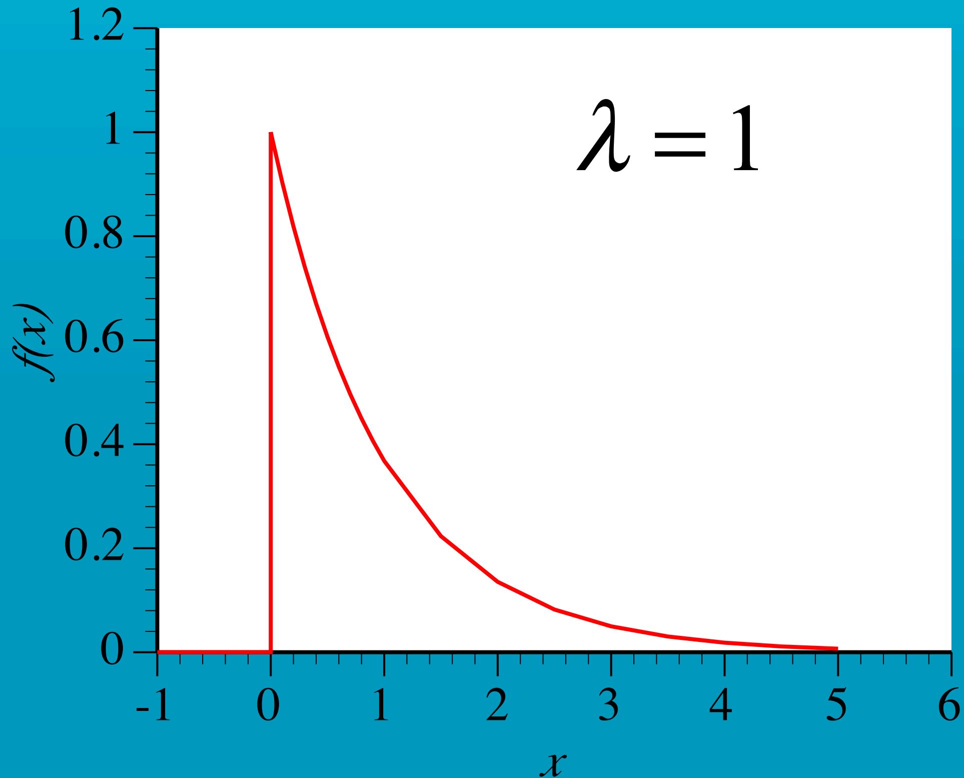
- 電子部品の寿命や宇宙線の飛来時間間隔、放射性原子崩壊などの確率分布。パラメーターは一つ。

- 確率変数

$$x \geq 0$$

- 確率密度関数

$$f\left(x\right) = \lambda e^{-\lambda x}$$



指数分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \int_0^{\infty} dx \lambda e^{-\lambda x} = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = 1$$

- 平均

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} dx x f(x) = \int_0^{\infty} dx x \lambda e^{-\lambda x} = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dx e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$$

- 分散

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-\mu)^2 f(x) = \int_0^{\infty} dx \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

指数分布の統計量.2

- k次の0周りのモーメント

$$o_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^k f(x) = \int_0^{\infty} dx x^k \lambda e^{-\lambda x} = \lambda \int_0^{\infty} dx x^k e^{-\lambda x}$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} dx x^{k-1} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right) e^{-\lambda x} = \cdots = \lambda \int_0^{\infty} dx (-1)^k \frac{\partial^k e^{-\lambda x}}{\partial \lambda^k}$$

$$= (-1)^k \lambda \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \int_0^{\infty} dx e^{-\lambda x} = (-1)^k \lambda \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty}$$

$$= (-1)^k \lambda \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = (-1)^k \lambda (-1) \frac{\partial^{k-1}}{\partial \lambda^{k-1}} \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$$= \cdots = (-1)^{2k} \lambda k! \frac{1}{\lambda^{k+1}} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

指数分布の統計量.3

- スキューネス　$S=2$
- フラットネス　$F=9$
- 特性関数

$$\tilde{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}dxe^{i\xi x}f(x)=\int_{0}^{\infty}dx\lambda e^{(i\xi-\lambda)x}=\lambda\left[\frac{e^{(i\xi-\lambda)x}}{i\xi-\lambda}\right]_{0}^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-i\xi}$$

指数分布の要点

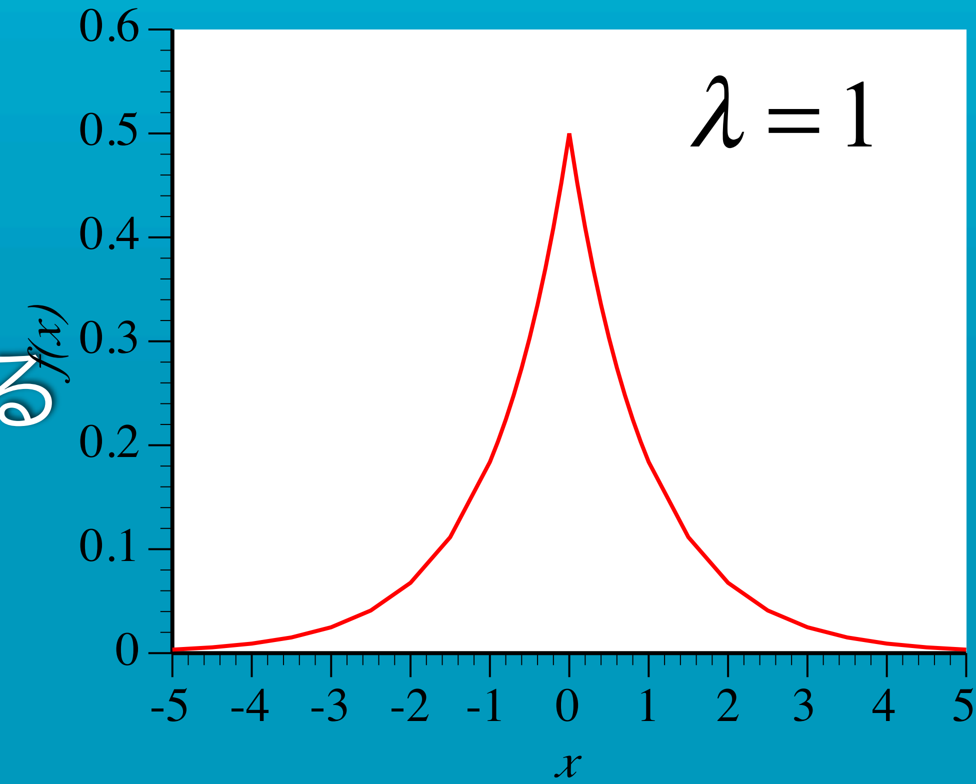
- この確率分布は非常に簡単に積分できることもあり、確率がいくつであるかを計算できないといけない。

$$p\left(x_L < x < x_H\right) = \int_{x_L}^{x_H} dx\, f\left(x\right) = \int_{x_L}^{x_H} dx \lambda e^{-\lambda x}$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x_L}^{x_H} = e^{-\lambda x_L} - e^{-\lambda x_H}$$

ラプラス分布(Laplacian distribution)
(Double exponential distribution)

- 乱流の渦度や圧力において出現する確率分布
- 確率変数　$-\infty \le x \le \infty$
- 確率密度関数　$f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$
- パラメーターは２つ
- 指数分布と同様簡単に計算できる



ラプラス分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|} = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\mu} dx e^{\lambda\left(x-\mu\right)} + \frac{\lambda}{2}\int_{\mu}^{\infty} dx e^{-\lambda\left(x-\mu\right)}$$

$$= \lambda \int_{0}^{\infty} dy e^{-\lambda y} = \left[-e^{-\lambda y}\right]_{0}^{\infty} = 1$$

- 平均

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x f\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{\mu} dx x e^{\lambda\left(x-\mu\right)} + \frac{\lambda}{2}\int_{\mu}^{\infty} dx x e^{-\lambda\left(x-\mu\right)} = \mu$$

ラプラス分布の統計量.2

- 分散

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(x-\mu\right)^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|} = \frac{2}{\lambda^2} \qquad \sigma = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$$

- スキューネス　$S = 0$

- フラットネス　$F = 6$

- 特性関数

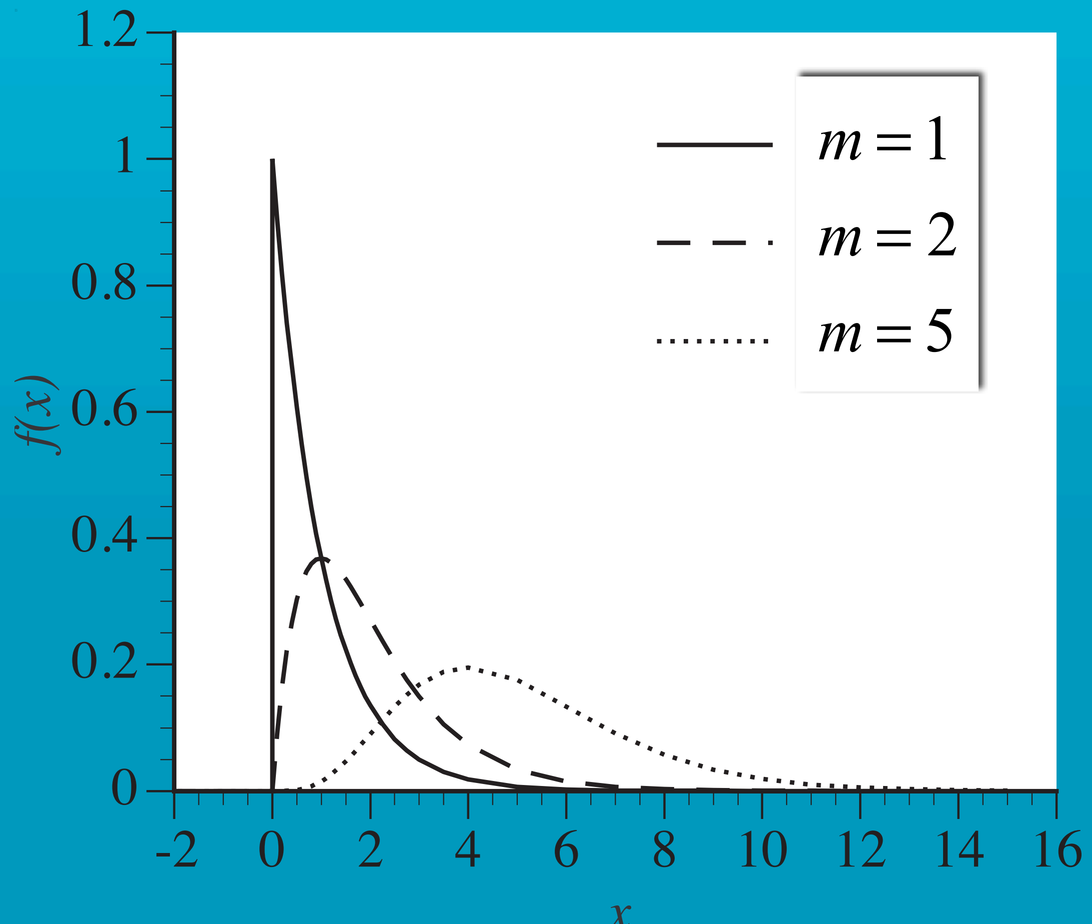
$$\tilde{f}\left(\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\xi x} f\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\lambda}{2} e^{i\xi x-\lambda|x-\mu|} = \frac{\lambda^2 e^{i\xi\mu}}{\left(\xi^2+\lambda^2\right)}$$

アーラン分布 (Erlang distribution)

- ランダムに発生する事象がn回連続して発生するのにかかる総時間を確率変数とするとき、この確率分布はアーラン分布に従う。
- この分布は行列待ち時間に関して提案されたものであり、今日では通信トラフィック分野で頻繁に登場している確率分布である。
- 指数分布の拡張版であるといえる。

アーラン分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!} \qquad 0 < x < \infty$$



統計量

$$\mu = \frac{m}{\lambda} \qquad \sigma^2 = \frac{m}{\lambda^2}$$

$$S = \frac{2}{\sqrt{m}} \qquad F = 3 + \frac{6}{m}$$

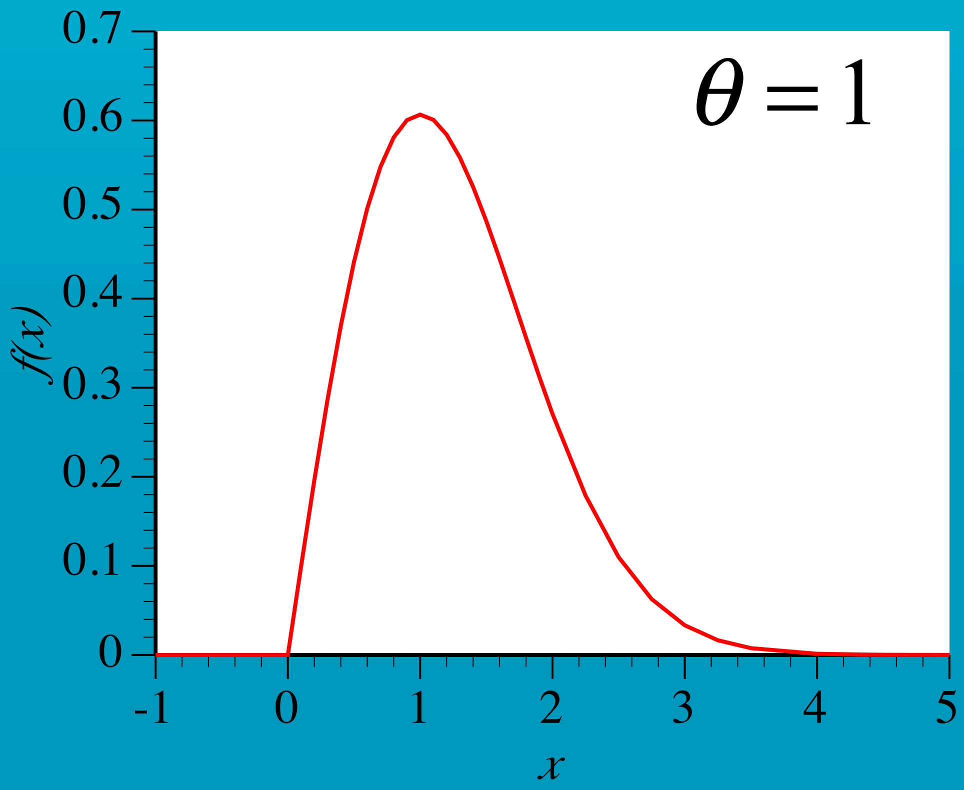
正規分布(Normal distribution)

詳細はいずれ！

レイリー分布(Rayleigh distribution)

- ２次元運動理論。χ^2分布の自由度2に対応している。パラメーターは一つ。
- 確率変数　$x \geq 0$
- 確率密度関数

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right)$$



レイリー分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) = \int_0^{\infty} dx \frac{x}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) = \int_0^{\infty} dy e^{-y} = \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$$

- 平均

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} dx x f(x) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right) = \sqrt{2}\theta \int_0^{\infty} dy y^{\frac{1}{2}} e^{-y}$$

$$= \sqrt{2}\theta \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\theta$$

レイリー分布の統計量.2

- ２乗量の期待値

$$o_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 f\left(x\right) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\theta^2}\right)$$

$$= 2\theta^2 \int_0^{\infty} dy y \exp\left(-y\right) = 2\theta^2 \Gamma\left(2\right) = 2\theta^2$$

- 分散　$\sigma^2 = o_2 - \mu^2 = 2\theta^2 - \frac{\pi}{2}\theta^2 = \frac{4-\pi}{2}\theta^2$

- 標準偏差　$\sigma = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\theta$

レイリー分布の統計量.3

- スキューネス

$$S=\frac{2\sqrt{\pi}\left(\pi-3\right)}{\left(4-\pi\right)^{\frac{3}{2}}}\approx 0.63111$$

- フラットネス

$$F=\frac{32-3\pi^2}{\left(4-\pi\right)^2}\approx 3.245$$

- 特性関数

$$\tilde{f}\left(\xi\right)=1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Erf}\left(i\frac{\xi\theta}{\sqrt{2}}\right)+1\right\}\xi\theta\exp\left(-\frac{\xi^2\theta^2}{2}\right)$$

誤差関数 $\mathrm{Erf}\left(x\right)=\int_0^x dte^{-t^2}=e^{-x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!!}$

レイリー分布の性質

- ２次元気体分子の運動(マクスウェル分布，正規分布)

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right),\quad f(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$u=q\cos\theta,\quad v=q\sin\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial q}=\cos\theta,\frac{\partial u}{\partial \theta}=-q\sin\theta=-v,\frac{\partial v}{\partial q}=\sin\theta,\frac{\partial v}{\partial \theta}=q\cos\theta=u$$

$$f(q,\theta)=f(u,v)J=\frac{q}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)$$

速度の大きさの確率分布

$$f(q)=\int_0^{2\pi}d\theta f(q,\theta)=\int_0^{2\pi}d\theta\frac{q}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{q}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{q}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma^2}\right)$$ ←レイリー分布

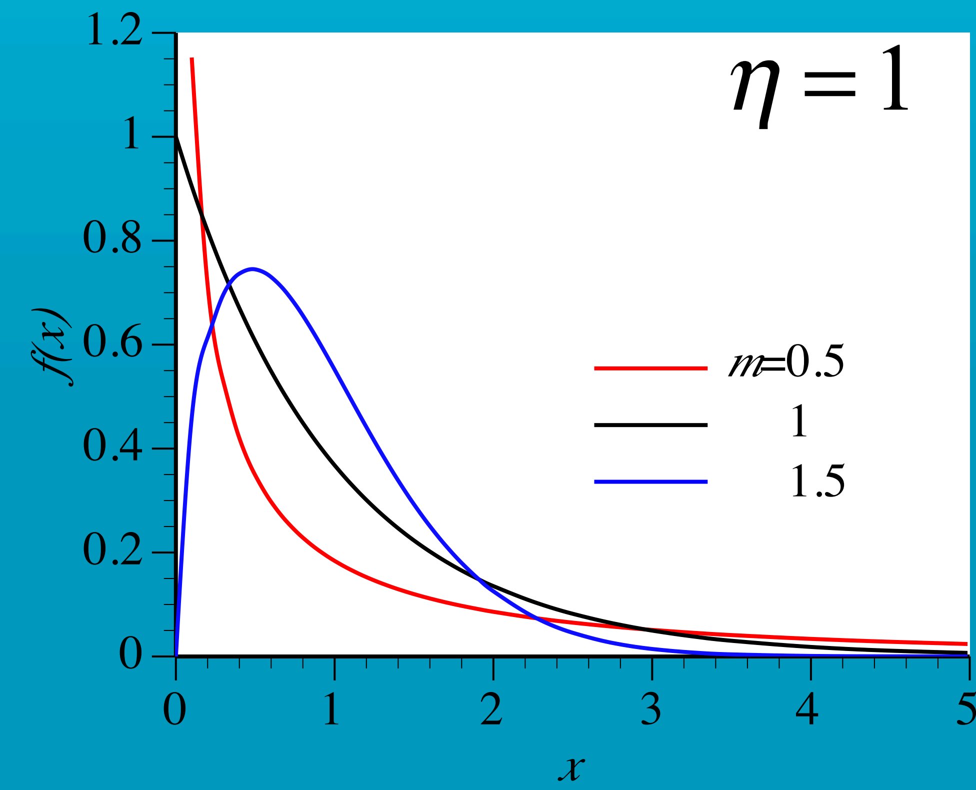
ワイブル分布(Weibull distribution)

- 物体の強度や時間に対する劣化現象や寿命を記述する確率分布

- 確率変数　$x \geq 0$

- 確率密度関数

$$f(x) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m}\right)$$



ワイブル分布の統計量.1

- 全確率の確認

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \int_0^{\infty} dx \frac{m}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m}\right) = \int_0^{\infty} dy e^{-y} = \left[-e^{-y}\right]_0^{\infty} = 1$$

- k次のゼロ周りのモーメント

$$o_k = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^k f(x) = \int_0^{\infty} dx x^k \frac{m}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{m}\right)$$

$$= \eta^k \int_0^{\infty} dy y^{k/m} \exp(-y) = \eta^k \Gamma\left(\frac{k}{m}+1\right)$$

ワイブル分布の統計量.2

- 平均

$$\mu = E\left[x\right] = \eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)$$

- 分散

$$\sigma^2 = o_2 - \mu^2 = \eta^2\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}$$

- 標準偏差

$$\sigma = \eta\sqrt{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)}$$

ワイブル分布の統計量.3

- スキューネス

$$S = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{m}+1\right) - 3\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) + 2\Gamma^3\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}^{3/2}}$$

- フラットネス

$$F = \frac{\Gamma\left(\frac{4}{m}+1\right) - 4\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{m}+1\right) + 6\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - 3\Gamma^4\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\left\{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right\}^{2}}$$

ワイブル分布の統計量.4

- 特性関数

$$E\left[e^{i\xi x}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{i\xi x}f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\xi\right)^{n}}{n!}x^{n}f\left(x\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\xi\right)^{n}}{n!}E\left[x^{n}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i\eta\xi\right)^{n}}{n!}\Gamma\left(\frac{n}{m}+1\right)$$

ワイブル分布の性質

- 故障現象はワイブル係数mによって次の三種類に分類される。
- m<1のとき、時間とともに故障率が小さくなる性質すなわち初期的な故障。
- m=1のとき、時間に対して故障率が一定となる性質すなわち偶発的な故障。（指数分布）
- m>1のとき、時間とともに故障率が大きくなる性質すなわち摩耗的な故障。

χ^2分布 (Chi-square distribution)

- 標本分布で説明します。

t分布(Student's t-distribution)

標本分布で説明します。

F分布(Snedecor F-distribution)

- 標本分布で説明します。