検定•推定練習

岡本正芳

解答の注意事項

- 答えだけ書けばいいという訳ではありません。
- 公式を必ず明記すること！
- 電卓を使って求められた標本統計量は明記しておくように！

母集団比率検定

母集団比率検定

問題

- コンピューターの製造会社が初期不良は5%以下であると主張している。そこで100台調査したところ8台初期不良であった。製造会社の主張が間違っていることを立証できるかどうか有意水準5%で検定せよ。

解答の手順.1
(仮説と公式の明記)

確率変数xを初期不良は1、正常は0とする。

仮説H_0: p=0.05(=p_0)　　対立仮説H_1: p>0.05

というように母集団比率右片側検定を行う。有意水準αで

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - np_0}{\sqrt{np_0\left(1-p_0\right)}} > K_\alpha$$

が仮説H_0の棄却条件となる。

解答の手順.２（標本統計量）

- 標本総数 $n = 100$
- 不良品数 $\sum_{i=1}^{100} x_i = 8$
- 評価対象 $p_0 = 0.05$
- 確率変数

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i - np_0}{\sqrt{np_0\left(1-p_0\right)}} = \frac{8-5}{\sqrt{5\times 0.95}} = 1.376$$

正規分布表より

$$K_{0.05} = 1.645$$

大小関係

$$1.376 < 1.645$$

仮説H_0は棄却されないので、

会社の主張は否定されない。

母平均検定

母平均検定

問題

ある振り子の周期は、力学理論結果では3.042秒である。ある人がストップウォッチを用いて、その周期を７回繰り返し測定した結果は以下のようであった。

3.11　3.05　3.00　3.08　3.06　3.10　3.04

この結果は理論と実験が一致したと結論できるか、有意水準0.05で検定せよ。

解答の手順.１（公式の明記）

- 仮説と対立仮説は以下で与えられる。
- 仮説H_0 : μ=3.042（=μ_0）　対立仮説H_1 : μ≠3.042
- として有意水準αで、母平均両側検定により

$$\left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sqrt{s^2/n}}\right| > t(n-1,\alpha)$$

- のとき、仮説H_0は棄却される。

解答の手順.２（標本統計量）

- 標本総数 $n = 7$
- 標本平均 $\overline{x} = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 3.063$
- 平方和 $S = \sum_{i=1}^{7}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 = 0.008543$
- 標本分散 $s^2 = \dfrac{S}{6} = 0.001424$

解答の手順.３（分布表）

- t分布表より

$$t(6, 0.05) = 2.447$$

- 確率変数の値は $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2 / n}}\right| = \left|\dfrac{3.063 - 3.042}{\sqrt{0.001424 / 7}}\right| = 1.472$
- よって　$\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{s^2 / n}}\right| < t(n-1, \alpha)$
- H_0は棄却されず、周期は3.042と考えてよいだろう。

母分散推定

母分散区間推定

問題

- 母分散の区間推定方法をまず示せ。その後、次の風速計測結果から母分散を区間推定せよ。

21.8	21.3	22.1	20.6	20.9	21.0
20.9	19.9	20.4	21.8	20.2	20.4

- 信頼度は0.98とせよ。

解答の手順.１（公式の明記）

- 信頼度$(1-\alpha)$で、母分散σ^2は

$$\frac{S}{\chi^2\left(n-1,\alpha/2\right)}<\sigma^2<\frac{S}{\chi^2\left(n-1,1-\alpha/2\right)}$$

- の範囲内にある。 ここで、Sは平方和である。χ^2の関数値はχ^2分布表から求める。

解答の手順. 2（標本統計量）

- 標本総数　$n = 12$
- 標本平均　$\bar{x} = 20.94$
- 平方和　$S = 5.289$
- 標本分散　$s^2 = 0.4808$

解答の手順.３（分布表）

- χ^2分布表から

$$\chi^2(11, 0.01) = 24.725 \qquad \chi^2(11, 0.99) = 3.053$$

- 結果として

$$0.2139 = \frac{5.289}{24.725} = \frac{5.289}{\chi^2(11, 0.01)} < \sigma^2 < \frac{5.289}{\chi^2(11, 0.99)} = \frac{5.289}{3.053} = 1.732$$

$$0.2139 < \sigma^2 < 1.732$$

母平均差推定

母平均差区間推定

問題

- AとBの標本に対して信頼度95%で母平均差区間推定せよ。公式や標本に関する統計量も明記すること。
- A{32.3, 31.5, 32.8, 33.7, 34.4, 33.2, 33.9, 34.2, 31.0}
- B{29.8, 30.0, 28.9, 31.2, 30.5, 29.5, 30.7, 32.0}

解答の手順.１（標本統計量）

標本A		標本B	
標本総数	$n_A = 9$	標本総数	$n_B = 8$
標本平均	$\bar{x}_A = 33$	標本平均	$\bar{x}_B = 30.325$
平方和	$S_A = 11.52$	平方和	$S_B = 6.835$
標本分散	$s_A^2 = 1.44$	標本分散	$s_B^2 = 0.976$

解答の手順.２（公式の明記）

- 仮説と対立仮説は以下で与えられる。
- 仮説H_0： $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$ 　　対立仮説H_1：$\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
- として有意水準αで、等分散検定により

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} < \frac{1}{F\left(n_B - 1, n_A - 1; \alpha / 2\right)} \text{ または } \frac{s_A^2}{s_B^2} > F\left(n_A - 1, n_B - 1; \alpha / 2\right)$$

- のとき、仮説H_0は棄却され等分散ではない。

解答の手順.３（分布表）

- F分布表から

$$\frac{1}{F(7,8;0.025)} = \frac{1}{4.529} = 0.221 \qquad F(8,7;0.025) = 4.899$$

- F分布に従う確率変数 $\dfrac{s_A^2}{s_B^2} = \dfrac{1.44}{0.976} = 1.475$

$$\frac{1}{F(7,8;0.025)} < \frac{s_A^2}{s_B^2} < F(8,7;0.025)$$

棄却条件は成立せず、等分散と考えてよく、次に母平均差区間推定を行なう。

解答の手順.４（公式の明記）

信頼度$(1-\alpha)$で、母平均差$\mu_A - \mu_B$は

$$\bar{x}_A - \bar{x}_B - t\left(n_A + n_B - 2, \alpha\right)\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)\left(\frac{S_A + S_B}{n_A + n_B - 2}\right)} <$$

$$\mu_A - \mu_B < \bar{x}_A - \bar{x}_B + t\left(n_A + n_B - 2, \alpha\right)\sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)\left(\frac{S_A + S_B}{n_A + n_B - 2}\right)}$$

の範囲内にある。

解答の手順.５（結果の明記）

t分布表から　$t(15,0.05)=2.131$

$$1.48 = 2.625 - 2.131\sqrt{\frac{17}{72}\frac{18.355}{15}} < \mu_A - \mu_B$$
$$< 2.625 + 2.131\sqrt{\frac{17}{72}\frac{18.355}{15}} = 3.77$$

母平均差は$1.48<\mu_A-\mu_B<3.77$となり、Aの方が大きいようだ。

適合度検定

適合度検定

キーポイント「法則に従うことを期待」

問題

- 一定規格のろ紙100枚を調べて、ある基準より大きい穴が何個あるかを調べて下の表のような結果が得られた。この分布がポアソン分布に従っているといえるか。有意水準0.05で評価せよ。

穴の個数	0	1	2	3	4	5以上	計
ろ紙枚数	55	31	11	2	1	0	100

解答の手順.1
（ポアソン分布への最尤法）

- 確率関数 $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$
- 最尤法による推定パラメーター $\lambda = \bar{x}$
- 標本平均 $\bar{x} = 0.63$ $y_i = n \frac{0.63^i}{i!} e^{-0.63}$

穴の個数	0	1	2	3	4	5以上	計
ろ紙枚数	55	31	11	2	1	0	100
期待度数	53.3	33.6	10.6	2.2	0.3	0	100

解答の手順. 2（公式の明記）

- 標本をk個の階級に分けて、各階級iに入った標本数を観測度数y_iとし、その合計を総度数nとする。各階級iに入る確率p_iとすると各階級に入ると期待される期待度数はnp_iとなる。総度数nが十分に大きいとき、確率変数

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(y_i - np_i\right)^2}{np_i}$$

- は自由度k–1のχ^2分布に従う。有意水準αで

$$x > \chi^2\left(k-1, \alpha\right)$$

- のとき、各階級iに入る確率はp_iではない。

解答の手順. 3
（標本結果の整理）

- 確率変数は

$$x=\frac{(y_1-np_1)^2}{np_1}+\frac{(y_2-np_2)^2}{np_2}+\frac{(y_3-np_3)^2}{np_3}+\frac{(y_4-np_4)^2}{np_4}+\frac{(y_5-np_5)^2}{np_5}$$

$$=\frac{(55-53.3)^2}{53.3}+\frac{(31-33.6)^2}{33.6}+\frac{(11-10.6)^2}{10.6}+\frac{(2-2.2)^2}{2.2}+\frac{(1-0.3)^2}{0.3}$$

$$=0.054+0.201+0.015+0.018+1.633=1.921$$

穴の個数	0	1	2	3	4	5以上	計
ろ紙枚数	55	31	11	2	1	0	100
期待度数	53.3	33.6	10.6	2.2	0.3	0	100

解答の手順.４（分布表）

- χ^2分布表より

$$\chi^2(5-1,0.05)=\chi^2(4,0.05)=9.488$$

- 確率変数との比較

$$x=1.921<9.488=\chi^2(k-1,\alpha)$$

- 棄却条件は成立せず、ポアソン分布に従うようだ。